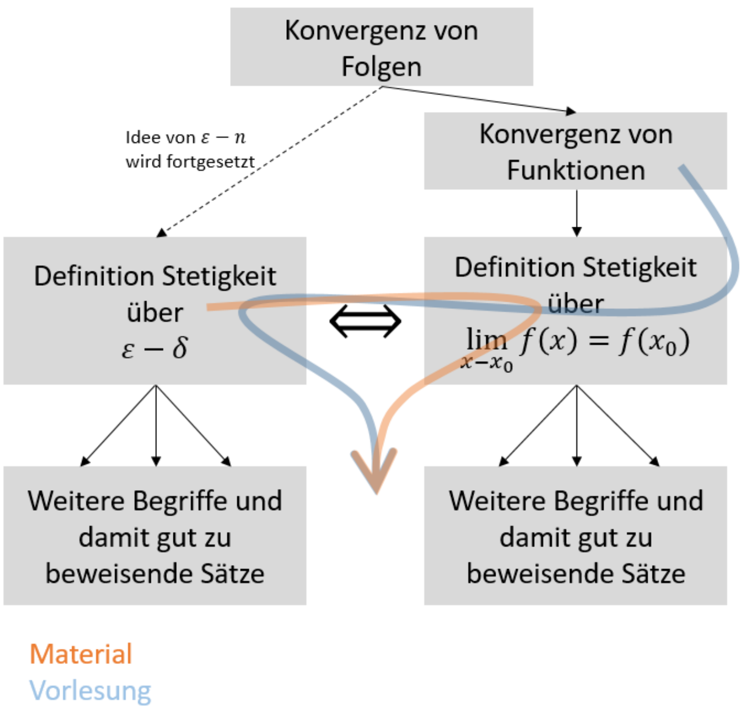
*Vielen Dank, dass Sie sich für die Teilnahme an der Studie entschieden haben.*

Das vorliegende Material soll Ihnen dabei helfen, den Begriff der Stetigkeit in Form der $\varepsilon - \delta$-Definition besser zu verstehen und den Bezug zur Definition über Konvergenz von Funktionen herstellen.

**Bevor es losgeht, hier noch ein paar wichtige Hinweise zum Material:**

1. Das Material eröffnet eine andere Perspektive auf den Stetigkeitsbegriff:




2. Lassen Sie sich von der **Seitenzahl** nicht abschrecken: Im Material gibt es zum Teil Platz für Antworten und es enthält viel erklärenden Text, der weniger „dicht“ geschrieben ist als ein Mathematik-Lehrwerk.
3. Sie können natürlich **wählen**, welche Aufgaben Sie bearbeiten wollen. Aufgaben, von denen Sie glauben, dass sie Ihnen nichts bringen, können Sie auslassen. Vielleicht werfen Sie aber einen Blick in die Lösung, damit Ihnen nichts entgeht.
4. Das Material ist wie folgt **aufgebaut**: Auf der linken Seite finden Sie QR-Codes bzw. Links zu Visualisierungen für einzelne Aufgaben – diese öffnen Sie am besten an einem PC oder Laptop, da Sie eine genaue Mausführung benötigen. Außerdem finden Sie übergeordnete Leitfragen, die Sie auch für das Verstehen anderer mathematischer Inhalte nutzen können.
5. Das Material besteht aus **3 Teilen**:
   I. Dieser Teil beschäftigt sich ausführlich mit der $\varepsilon - \delta$-Definition von Stetigkeit und mit vielen Beispielen stetiger und unstetiger Funktionen sowie Visualisierungen – dieser Teil ist also **sehr wichtig**.
   II. Dieser Teil stellt den direkten Bezug zur Definition in der Vorlesung her und reflektiert Nachweismöglichkeiten für Stetigkeit (hierfür gibt es auch ein Zusatzmaterial mit Beispielen).

*Für Rückfragen stehe ich natürlich zur Verfügung – einfach formlos eine Email an apel@mathematik.tu-darmstadt.de schreiben oder anrufen unter: 0615 16 22458.*

*Liebe Grüße*

*Insa*

# Stetigkeit

# Teil 1

Kern vieler Betrachtungen ist die Untersuchung des Verhaltens von Funktionen und die Bildung von Begriffen wie Monotonie, Injektivität, Surjektivität oder Konvergenz zur Beschreibung des Verhaltens von Funktionen. Im Folgenden soll ein weiteres Phänomen bei Funktionen untersucht werden und anschließend mathematisch präzisiert werden.

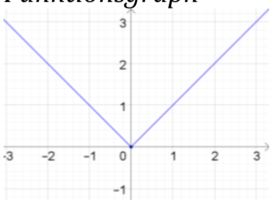
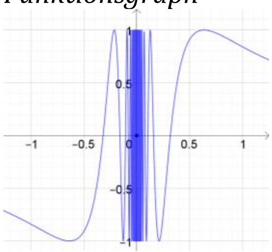
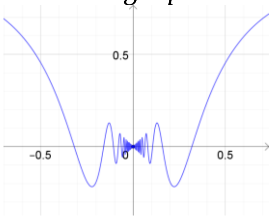
### 1) Aufgabe: Einstieg

Betrachten Sie die folgenden Funktionen $f_1$ bis $f_4$.

***Wie verhalten sich die Funktionen um die Stelle $x_0 = 0$ herum?***

- Wenn Sie $x_0$ ein bisschen verändern, ändert sich $f(x_0)$ „währenddessen“ dann auch „nur ein bisschen“?
- Wenn Sie sich $x_0$ nähern, was können Sie dann für die Funktionswerte beobachten? Nähern sich diese auch $f(x_0)$?

https://bit.ly/33xej5f

<table>
<tr><td>Funktionsgraph<br></td><td>Funktionsvorschrift<br>$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit<br>$f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$</td><td>Funktionsgraph<br></td><td>Funktionsvorschrift<br>$f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit<br>$f_2(x) = |x|$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verbale Beschreibung<br>Werte, die echt kleiner als Null sind, werden auf $-1$ abgebildet, Werte, die Null oder größer sind, werden auf 1 abgebildet.</td><td colspan="2">Verbale Beschreibung<br>Werte, die echt kleiner als Null sind, werden auf $-x$ abgebildet, Werte, die Null oder größer sind, werden auf $x$ abgebildet.</td></tr>
<tr><td>Funktionsgraph<br></td><td>Funktionsvorschrift<br>$f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit<br>$f_3(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$</td><td>Funktionsgraph<br></td><td>Funktionsvorschrift<br>$f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit<br>$f_4(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Verbale Beschreibung<br>Die Funktion verläuft zyklisch (Sinus), allerdings bewirkt $1/x$, dass die Funktion immer „schneller“ oszilliert, wenn sich x auf 0 zubewegt ($1/x$ wird dann immer „schneller“ größer und damit wird die Periode immer kleiner). Die Funktion schwankt somit immer schneller zwischen $-1$ und 1 hin und her, wenn $x$ gegen 0 geht.</td><td colspan="2">Verbale Beschreibung<br>Die Funktion verläuft zyklisch (Sinus), allerdings bewirkt $1/x$, dass die Funktion immer „schneller“ oszilliert, wenn sich $x$ auf 0 zubewegt ($1/x$ wird dann immer „schneller“ größer und damit wird die Periode immer kleiner). Die Multiplikation mit $x$ bewirkt zudem, dass die Amplitude (also der maximale Ausschlag der Oszillation) gedämpft wird, wenn $x$ kleiner wird.</td></tr>
</table>

Wie Sie gerade wahrscheinlich festgestellt haben, können sich Funktionen darin unterscheiden, *ob sich während einer kleinen Änderung von $x_0$ die Funktionswerte auch nur „ein bisschen“ ändern.* Was soll aber „währenddessen“ oder „nur ein bisschen ändern“ bedeuten? Man könnte es auch so formulieren: Während einer kleinen Änderung von $x_0$, ändern sich die Funktionswerte nicht stark. Doch was soll „nicht stark“ heißen? Es könnte heißen, dass man die Änderung der Funktionswerte beliebig klein halten kann, indem man die Änderung von $x_0$ entsprechend klein wählt. So ist das „gleichbedeutend“ mit der Frage, **ob man zu beliebig kleinen Änderungen im Funktionswert eine passende Änderung im Argument (x-Wert) finden kann, sodass es „währenddessen“ keine größere Änderung im Funktionswert gibt.** Funktionen mit dieser Eigenschaft besitzen eine gewisse Kontinuität und dadurch eine gewisse „Berechenbarkeit“. Davon gehen wir im Alltag intuitiv ganz häufig aus, wenn das Ergebnis ein wenig verändert sein soll (bspw. Kuchen weniger süß), dann muss die Eingabe ein wenig verändert werden (weniger Zucker). Dabei können wir das Ergebnis beliebig festsetzen und finden immer eine passende Eingabe. Das mathematische Konzept der Stetigkeit präzisiert diese Vorstellung und hilft, sprachliche Ungenauigkeiten wie „währenddessen“ oder „ändert sich nur ein wenig“ in den Griff zu bekommen.

Hinführung

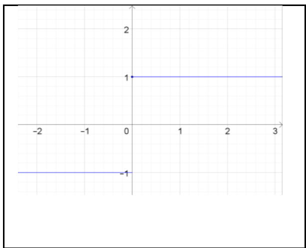
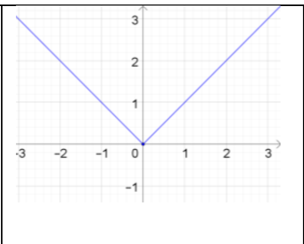
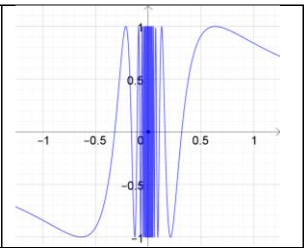
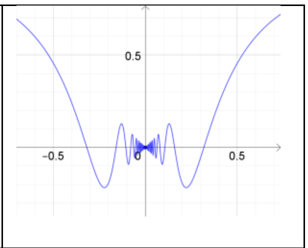
https://bit.ly/2YMxAke

*Erklärung zur Geogebra-Datei*
*https://bit.ly/2KL4F6m*

## 2) Aufgabe: Hinführung $\varepsilon - \delta -$ Definition

In einem ersten Schritt soll grafisch betrachtet werden, was es für die Funktionen $f_1$ bis $f_4$heißen könnte, dass…

> …man für jede beliebige Änderung (ε) der Funktionswerte ($f(x_0) \pm \varepsilon$ ) eine Schranke (δ) für Änderungen im Argument vorgeben kann ($x_0 \pm \delta$), sodass die Funktionswerte für Werte innerhalb dieser Schranke („währenddessen“) innerhalb der gewünschten Änderung ($f(x_0) \pm \varepsilon$ ) verbleiben.

| | | | |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ | $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \lvert x \rvert$ | $f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & sonst \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ | $f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_4(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & sonst \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ |

a) *Stellen Sie ε beliebig ein, indem Sie an der oberen grünen Begrenzung ziehen. Versuchen Sie dann, ein passendes $\delta$ zu finden, sodass die Funktionswerte der Werte im orangenen Bereich alle im grünen Bereich (innerhalb von $f(x_0) \pm \varepsilon$) liegen. Versuchen Sie das für verschiedene ε-Werte.*

b) *Verschieben Sie $x_0$ und wiederholen Sie a). Notieren Sie Ihre Beobachtungen[1], beispielsweise in der folgenden Tabelle:*

| | Findet man für das voreingestellte $x_0 = 0$ zu jedem ε ein passendes δ? | Findet man für andere $x_0$ zu jedem ε ein passendes δ? |
|---|---|---|
| $f_1$ | | |
| $f_2$ | | |
| $f_3$ | | |
| $f_4$ | | |

[1] Es geht an dieser Stelle um Ihre Vermutungen auf Basis der Anschauung, nicht um Nachweise.

Funktionen, bei denen man für ein $x_0$ für jedes $\varepsilon$ immer ein passendes $\delta$ angeben kann, sodass für alle Werte in der $\delta$-Umgebung um $x_0$ die Funktionswerte in der $\varepsilon$-Umgebung um $f(x_0)$ liegen, heißen **stetig in $\boldsymbol{x_0}$** (bspw. sind $f_2$ und $f_4$ stetig in $x_0 = 0$). Funktionen, bei denen das in $x_0$ nicht geht, heißen **unstetig in $\boldsymbol{x_0}$** (bspw. sind $f_1$ und $f_3$ unstetig in $x_0 = 0$). Funktionen, bei denen das für alle Elemente aus dem Definitionsbereich $D$ funktioniert ($f_2$ und $f_4$) heißen **stetig auf $\boldsymbol{D}$**. Nutzt man nun noch eine formale Darstellung für $\varepsilon$-Umgebung und $\delta$-Umgebung durch die mathematische Darstellung des Abstandes durch den Betrag, so ergibt sich die formale Darstellung:

(Notieren Sie sorgfältig die Definition.)

**Definition:** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Betrachten Sie die Struktur der Definition:

- Über welche Gegenstände wird eine Aussage getroffen?
- Welcher Begriff wird definiert?
- Welches sind die definierenden Eigenschaften?

### 3) Aufgabe: Formulierung und Struktur der Definition

Im Folgenden wird die Definition sehr genau auf verschiedenen Ebenen betrachtet.

*a) Grobstruktur der Definition*

- Über welche Gegenstände wird eine Aussage getroffen?
- Welcher Begriff wird definiert?
- Welches sind die definierenden Eigenschaften?

*b) Die Definition im Detail*

Zergliedern Sie die Definition:

- Was bedeuten die vorkommenden Symbole jeweils?
- In welcher Beziehung stehen die Symbole zueinander?

Zerlegen Sie die Definition in – aus Ihrer Sicht – sinnvolle Bestandteile und machen Sie sich bewusst, was die darin vorkommenden Symbole im Einzelnen bedeuten und beschreiben Sie deren Beziehung innerhalb der Bestandteile.

Beispiel für einen möglichen Bestandteil:

„Für alle $x$ aus $D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt"

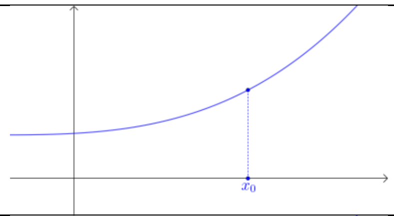
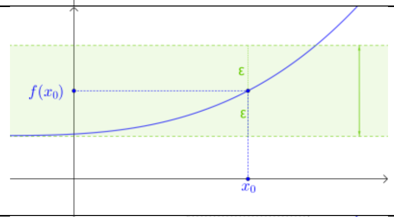
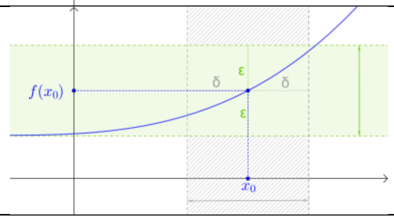
(Bedeutung der Symbole: $D$ ist der Definitionsbereich, $x$ steht für Elemente aus dem Definitionsbereich, $x_0$ für das Element, für das Stetigkeit betrachtet werden soll, $\delta$ ist die zuvor gewählte Zahl größer als 0, $|x - x_0|$ beschreibt den Abstand zwischen $x$ und $x_0$)

Beziehung: Für alle Elemente des Definitionsbereiches $D$, die $|x - x_0| < \delta$ erfüllen, also einen Abstand kleiner $\delta$ von $x_0$ haben, gilt eine (noch folgende) Aussage

Analysieren Sie die Bedeutungen der Bestandteile der Definition sowie die Verbindung zu einem Funktionsgraphen.

### *c) Graphische Deutung der Definition*

Welche graphische Bedeutung haben die einzelnen Teile der Definition? Erschließen Sie sich die Bedeutung, indem Sie die Definition mit für Sie geeigneten auch weniger formal-sprachlichen Mitteln (wie bspw. „Umgebung“ oder „Bereich“) beschreiben und das graphisch deuten:

| Zergliederung der Definition | Beschreibung | Bild |
|---|---|---|
| Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. | | |
| Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0$, wenn | |  |
| es zu jedem $\varepsilon > 0$ | |  |
| ein $\delta > 0$ gibt, sodass | |  |
| für alle $x \in D$ mit $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ gilt | | |
| $\lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$ | | |

Variieren Sie die Definition sprachlich (bspw. Operatoren ausschreiben).

### *d) Sprachliche Variation der Definition*

Formulieren Sie die Definition in für Sie gut eingängiger Form (ggf. mit oder ohne Symbole, mit mehr- oder weniger formalsprachlichen Mitteln).

Visualisieren Sie die Definition.

### *e) Visualisierung*

Erstellen Sie eine für Sie gut geeignete Visualisierung der Definition.[2] Eine Möglichkeit besteht zum Beispiel in einer „verallgemeinerten“ Visualisierung über eine Abbildung zwischen zwei Mengen oder aber für $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehr konkret im 2-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem wie in Aufgabe c).

[2] Entscheidend ist, dass alle wesentlichen Punkte der Definition in der Visualisierung enthalten sind.

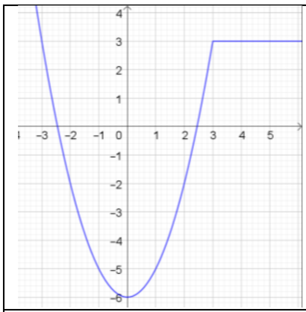
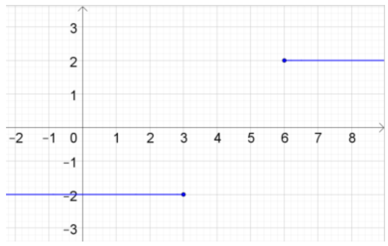
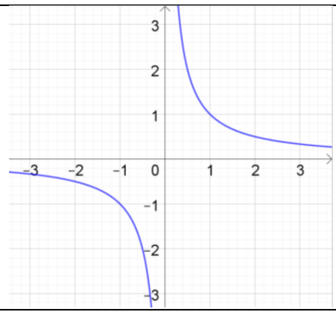
(Eigene) Beispiele & Gegenbeispiele

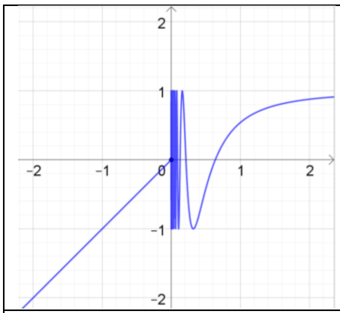
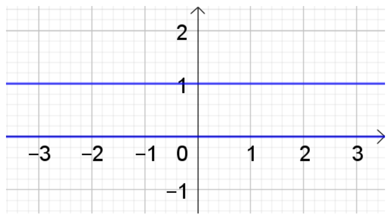
https://bit.ly/304VV1u

### 4) Aufgabe: Beispiele und Gegenbeispiele

An dieser Stelle geht es um die Analyse von Beispielen und Gegenbeispielen und eine anschaulich begründete Einschätzung, nicht um einen formalen Beweis.

a) Betrachten Sie die folgenden Funktionen (Geogebra): Welche Funktionen sind für welche $x_0$ stetig bzw. unstetig?

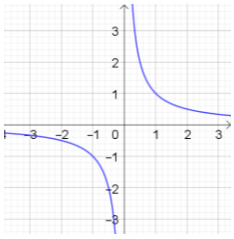
| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & x \leq 3 \\ 3 & sonst \end{cases}$ | $f_2 \colon \mathbb{R}\backslash(3{,}6) \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 6 \\ -2 & x \leq 3 \end{cases}$ | $f_3 \colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \frac{1}{x}$ |

| | |
|---|---|
|  |  |
| $f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_4(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \cos\left(\frac{1}{x}\right) & sonst \end{cases}$ | $f_5 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_5(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ |

b) Überlegen Sie sich ein eigenes Beispiel für eine Funktion (oder suchen Sie eine aus Büchern oder dem Internet), die an mindestens einer Stelle unstetig ist und für eine, die auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist.

## 5) Aufgabe: Fallstricke und Missverständnisse

### *a) Auf den Definitionsbereich kommt es an.*



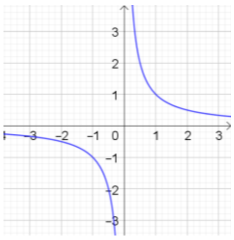
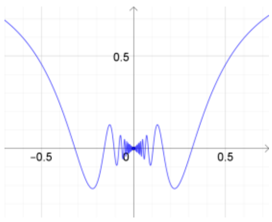
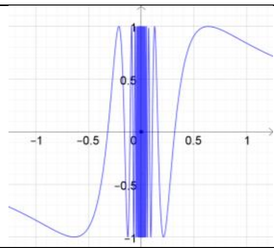
Stetigkeit ist nur für Elemente des Definitionsbereiches einer Funktion definiert. Das bedeutet aber auch, dass die Antwort auf die Frage nach Stetigkeit vom Definitionsbereich der Funktion abhängt.
So ist $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig, auf $\mathbb{R}$ (beispielsweise mit $f(0) := 0$) hingehen nicht für $x_0 = 0$.

Überlegen Sie:

- Ist $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig?
- Warum ist es nur sinnvoll für Elemente aus dem Definitionsbereich über Stetigkeit zu sprechen? (Tipp: An welcher Stelle der Definition (bzw. des Konzepts) bekommen Sie Schwierigkeiten, wenn Sie Elemente außerhalb des Definitionsbereiches betrachten?)

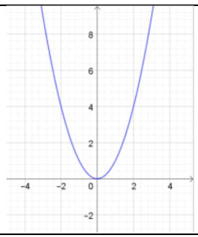
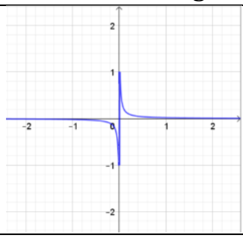
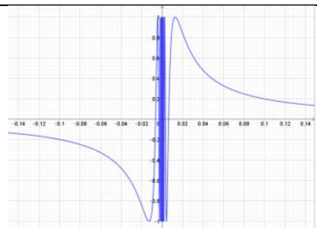
### *b) Durchzeichnen ohne abzusetzen?*

Überlegen Sie, warum die Beschreibung *„Eine Funktion heißt stetig, wenn ich ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen."* nicht ohne Weiteres mit der vorliegenden Definition von Stetigkeit übereinstimmt. (Tipp: Was genau soll „durchzeichnen" bedeuten und was bedeutet „ohne abzusetzen"?) Betrachten Sie dazu die Funktionen:

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ | $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & sonst \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ | $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & sonst \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ |

### *c) Bild des Funktionsgraphen.*

Die graphische (wenn möglich computergestützte) Betrachtung einer Funktion kann oft hilfreich sein, können aber auch trügerisch sein (bspw. durch Achsenskalierung oder Zoom). Wo liegt das Problem bei den folgenden Visualisierungen?

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $h(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x^2 + 0{,}001 & x \geq 0 \end{cases}$ | $f(x) = \sin\left(\frac{1}{50x}\right)$ | $f(x) = \sin\left(\frac{1}{50x}\right)$ bei veränderter Achsenskalierung |

### *d) Die Reihenfolge ist entscheidend*

Die $\varepsilon - \delta$-Definition von Stetigkeit ist komplex aufgebaut und enthält mehrere Symbole. Dabei ist die Reihenfolge der Symbole von Bedeutung, denn

„<u>für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$</u>, sodass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$“ (Stetigkeitsdefinition)

bedeutet etwas ganz anderes als

„<u>für jedes $\delta > 0$ existiert ein $\varepsilon > 0$</u> sodass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$“.

Was ist der Unterschied zwischen den beiden Ausdrücken? Machen Sie sich den Unterschied auch ganz konkret an der folgenden Funktion klar:

$$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \quad f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$


Vorstellungen zum Begriff reflektieren – Welche Vorstellungen hat man bzw. welche gibt es und wo liegen die Grenzen?

### 6) Aufgabe: Vorstellungen & Metaphern

Wie bereits analysiert, ist die Vorstellung von Stetigkeit als „Durchzeichnen ohne abzusetzen“ hilfreich, man sollte aber gleichzeitig ihre Grenzen kennen.

a) Im Folgenden werden einige Vorstellungen bzw. Metaphern dargestellt. Bilden diese Vorstellungen das Konzept für Sie gut ab?
   i. „Man kann die Abweichung von $f(x)$ so klein machen wie gewünscht, wenn man die Abweichung von $x$ so klein macht wie nötig.“
   ii. „Kleine Ursache – kleine Wirkung. – Kleinen Änderungen von x entsprechen kleine Änderungen von f(x).“
   iii. „Kommt $x$ immer näher an $x_0$, dann kommt auch $f(x)$ immer näher an $f(x_0)$.“
   iv. „Ich habe die Vorstellung von einer Funktion als eine Maschine, in die etwas eingegeben wird und die dann etwas ausgibt (ein Produkt[3]). Stetigkeit in $x_0$ bedeutet dann: Die Funktion ist stetig, wenn jede beliebige Genauigkeitsforderung an das Produkt um $f(x_0)$ durch eine Eingabe um $x_0$ herum erreicht werden kann.“
   v. „Die Änderungen in der Ausgabe sind durch die Eingabe kontrollierbar.“

b) Ist Ihre Vorstellung von Stetigkeit ähnlich zu einer der genannten oder haben Sie eine andere? Wo liegen die Grenzen Ihrer Vorstellung im Vergleich zur Definition und was sind für Sie die Stärken ihrer Vorstellung?

[3] Produkt hier nicht im mathematischen Sinne, sondern im Sinne der Warenproduktion.

# Stetigkeit

# Teil 2

Wie unterscheidet sich der Begriff von ähnlichen Begriffen bzw. wie hängt er damit zusammen?

### 7) Aufgabe: Alternative Stetigkeitsdefinition

In diesem Teil geht es um einen Vergleich des $\varepsilon - \delta$-Stetigkeitsbegriffs mit der Definition von Stetigkeit über Funktionenkonvergenz aus der Vorlesung. Damit wird eine bessere Vernetzung des Konzeptes erreicht und beide Definitionen haben in verschiedenen, weiteren Begriffen und Sätzen ihre Vorteile in der Begriffsbildung oder Beweisfindung.

In der Vorlesung haben Sie **Stetigkeit über die Konvergenz von Funktionen** definiert:

**Stetigkeitsdefinition aus der Vorlesung**[4]

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$. $f$ heißt stetig im Punkt $x_0$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. $f$ heißt stetig in $D$, falls $f$ in jedem Punkt von $D$ stetig ist.

Allerdings kann man mit dem Ausdruck $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ direkt nicht unbedingt arbeiten, er stellt ja nur eine Bezeichnung bzw. Abkürzung für ein anderes Konzept (Konvergenz bzw. Grenzwerte von Funktionen) dar.

In einer Definition vorkommende Begriffe klären.

*a) Schreiben Sie die Definition aus der Vorlesung komplett aus, indem Sie die Definition von $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ integrieren. (Diese neu gewonnene, ausführliche Definition nennen wir im Folgenden **„ausführliche Vorlesungsdefinition“**)*

https://bit.ly/33xej5f

*b) Betrachten Sie erneut die Fragestellung ganz zu Beginn des Materials (ggf. auch mit den Funktionen im Geogebra-Applet):*

Wenn Sie sich $x_0$ nähern, was können Sie dann für die Funktionswerte beobachten? Nähern sich diese auch $f(x_0)$?

*Wie hängt diese Fragestellung mit „ausführlichen Vorlesungsdefinition“ zusammen?*

Im Folgenden soll es nun darum gehen, auf Vorstellungsebene zu verstehen, **warum** die **beiden Definitionen** ($\varepsilon - \delta$-Stetigkeit und ausführliche Vorlesungsdefinition) **äquivalent** sind:

[4] Wegen der besseren Vergleichbarkeit mit der $\varepsilon - \delta$-Definition wurde $x_0$ statt $a$ hier zur Bezeichnung gewählt.

Eine Vorstellung, die mit der ausführlichen Vorlesungsdefinition verbunden ist, ist die Folgende:

**Vorstellung (1)**

„Stetigkeit in $x_0$ bedeutet: Egal wie man sich $x_0$ nähert bzw. sich auf $x_0$ zubewegt, man nähert sich auch immer $f(x_0)$ bzw. bewegt sich auf $f(x_0)$ zu."

Dabei beschreibt man mit „Egal wie man sich $x_0$ nähert bzw. sich auf $x_0$ zubewegt" den Teil „für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $x_0$ konvergiert". Mit nähert man sich auch immer $f(x_0)$ meint man „dann konvergiert auch die Folge der Funktionswerte $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x_0)$."

c) *Wählen Sie eine der beiden Aufgaben aus:*

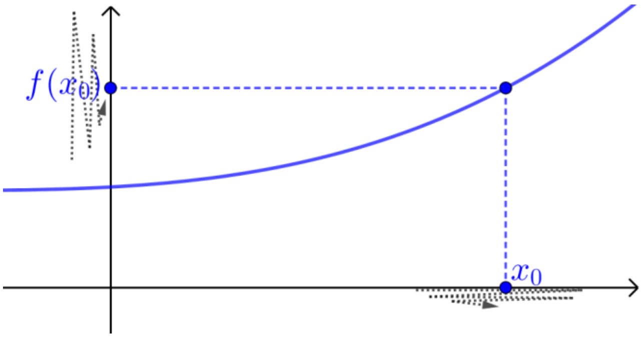
**A**: Wie hängt Vorstellung (1) nun mit der $\varepsilon - \delta$-Definition von Stetigkeit zusammen? Versuchen Sie, eine Verbindung zu schaffen, indem Sie die Bestandteile der Vorstellung präziser beschreiben.

Hinweis: Aber nicht über Folgen, denn das würde nur wieder zur Definition über Folgen führen.

oder

**B**: Lesen Sie den folgenden (fiktiven) Dialog, der die Entwicklung der Vorstellung beschreibt und beantworten Sie die darunter stehende Frage.

Studierender 1: Ich habe eine alternative Vorstellung zur Stetigkeit gefunden. Dafür gehe ich von der Vorstellung aus, die wir hatten und präzisiere sie einfach anders. Wir hatten Stetigkeit ja so: Eine Funktion ist stetig in $x_0$, wenn für jede Folge $x_n$, die gegen $x_0$ konvergiert, die Folge der Funktionswerte gegen $f(x_0)$ konvergiert. Das heißt also, man stellt sich vor: Egal wie man sich $x_0$ nähert, man nähert man sich auch $f(x_0)$. Daraus kann ich jetzt eine alternative Definition entwickeln, indem ich die unklaren Ausdrücke präzisiere, aber anders als mit Folgen.




*Grafik zu „Egal wie man sich $x_0$ nähert, man nähert sich immer auch $f(x_0)$."*

Studierender 2: Also so Ausdrücke wie „sich nähern"?

Studierender 1: Ja, genau.

Studierender 2: Und wie geht das anders als mit Folgen? Was soll „sich $f(x_0)$ nähern" denn heißen?

Studierender 1: Egal wie klein man den Abstand zu $f(x_0)$ vorgibt, man liegt immer irgendwann drin.

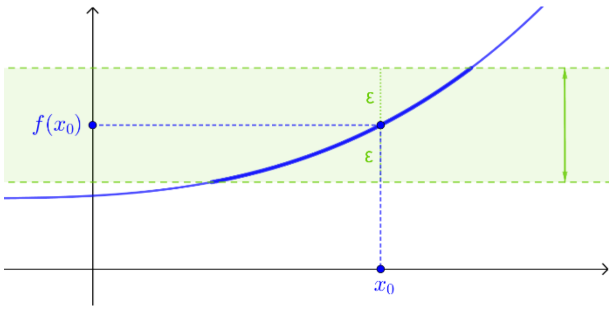
Studierender 2: Was heißt „drin"?

Studierender 1: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt für die Funktionswerte irgendwann: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Studierender 2: Und was heißt „irgendwann"?

Studierender 1: Na, beim irgendwann beim Annähern an $x_0$.

Studierender 2: Was soll das genau heißen, „Annähern an $x_0$"?

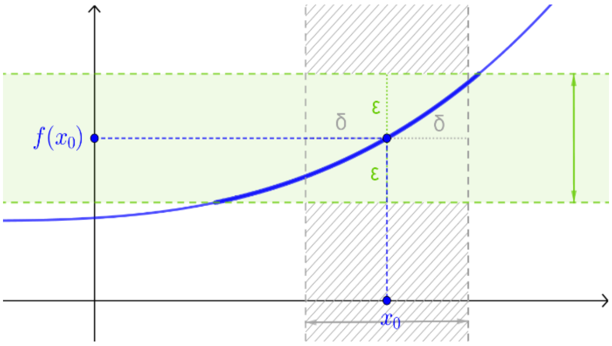



*Grafik zu „man liegt irgendwann immer <u>drin</u>"*

Studierender 1: Na, wenn man dann nur noch Werte betrachtet, die nahe genug an $x_0$ liegen. Also man betrachtet irgendwann nur noch die Werte, die näher als ein bestimmter Abstand an $x_0$ liegen, für die also $|x - x_0| < \delta$ für einen Abstand δ gilt.
Und diese Werte liegen dann drin, für die gilt dann: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Studierender 2: Nochmal zurück. Was heißt dann „irgendwann"?

Studierender 1: Also für jedes $\varepsilon > 0$ gilt irgendwann $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Und „irgendwann" heißt, es gibt ein $\delta > 0$, sodass das dann für alle $x \in D$ gilt, die in dieser δ-Umgebung um $x_0$ liegen, für die also $|x - x_0| < \delta$ gilt.

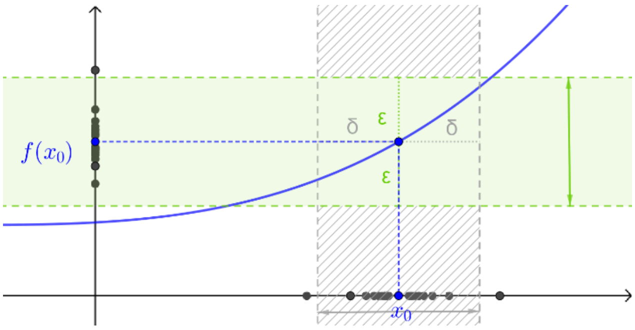


*Grafik zu „man liegt irgendwann immer drin."*

*Präzisieren Sie Vorstellung (1) mit Hilfe des Dialoges so für sich, dass Sie erkennen, dass sie gleichbedeutend mit der $\varepsilon - \delta$-Definition ist:*

Nun haben Sie zwar für sich schon plausibel gemacht, dass die ausführliche Vorlesungsdefinition auch zur $\varepsilon - \delta$-Definition führt, für eine Äquivalenz sollte man aber auch umgekehrt überlegen, **warum die $\varepsilon - \delta$-Definition zur ausführlichen Vorlesungsdefinition** führt:

d) *Machen Sie sich klar, dass aus der $\varepsilon - \delta$-Definition auch die ausführliche Vorlesungsdefinition folgt:*
*Was gilt nämlich für die Folge der Funktionswerte $f(x_n)$ von Folgen $x_n$, die gegen $x_0$ konvergieren, wenn die Folge stetig ist nach $\varepsilon - \delta$-Definition?*



*Grafik mit der Beispielfolge:* $x_n = \begin{cases} x_0 + \frac{1}{n}, n \text{ gerade} \\ x_0 - \frac{1}{n}, n \text{ ungerade} \end{cases}$

Die Äquivalenz der beiden Funktionen soll abschließend durch einen Beweis abgesichert werden. Die Einsicht in die Äquivalenz beruht insbesondere bei der Richtung „ausführliche Vorlesungsdefinition $\Longrightarrow$ $\varepsilon - \delta$-Definition" noch sehr auf Vorstellungen. Die andere Richtung „$\varepsilon - \delta$-Definition $\Longrightarrow$ ausführliche Vorlesungsdefinition" ist hingegen schon etwas mehr abgesichert, ein sauberer **Beweis** sollte dennoch erarbeitet werden:

Es ist zu zeigen:

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

(1) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

(2) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$: für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

*e) Beweisen Sie die Äquivalenz. Entwickeln Sie dazu entweder leitfragengestützt eigenständig einen Beweis (A) <u>oder</u> vollziehen Sie den gegebenen Beweis leifragengestützt nach (B).*

**A**: **Eigenständige Beweisentwicklung**

Hinweis: Bei der Richtung „$\varepsilon - \delta$-Definition $\Longrightarrow$ ausführliche Vorlesungsdefinition“ lässt sich die Einsicht über die Vorstellung leider nicht zu einem Beweis ausarbeiten, insbesondere ist es sehr schwierig, einen direkten Beweis zu führen, da sich die Konstruktion eines $\delta > 0$ als große Hürde erweist. Nutzen Sie hier einen *indirekten Beweis.*[5]

Leitfragen:

- Fertigen Sie eine **Visualisierung** von der Situation an: Welche Teile sind gegeben, welche gesucht? Welche Teile davon lassen sich in formale Aspekte übersetzen und sind allgemeingültig? Welche Schlüsse lassen sich ggf. daraus ziehen?
- Arbeiten Sie **Vorwärts**: Was ist Ihre Ausgangssituation? Was haben Sie gegeben? Wovon können Sie ausgehen?
- Arbeiten Sie **Rückwärts**: Was ist das Ziel? Was bräuchten Sie, um das Ziel zu erreichen?
- Bedenken Sie verschiedene **grundlegende Beweismöglichkeiten:** direkter Beweis, indirekter Beweis mittels Widerspruch, indirekter Beweis mittels Kontraposition oder Beweis durch vollständige Induktion.

a) *Notieren Sie Ihre Gedanken und **entwickeln** Sie eine Argumentation.*
Versuchen Sie dabei nicht von Anfang an einen Beweis zu formulieren, sondern nutzen Sie alle Freiheiten und arbeiten Sie erst am Ende einen sauberen, formalen Beweis aus. Möglicherweise müssen Sie zwischen den Phasen der Beweisentwicklung und der Beweisformulierung mehrfach hin und her springen.

b) ***Prüfen** Sie abschließend noch einmal, ob ihr Beweis korrekt ist.*
(Zirkelschlüsse? Lücken? Zeigen Sie, was Sie zeigen wollen?)

c) ***Reflektieren** Sie noch einmal inhaltlich Ihren Beweis:*
   - An welcher Stelle geht welche Voraussetzung ein?
   - Gibt es eine Visualisierung für die einzelnen Beweisschritte?

**B**: **Beweis nachvollziehen**

Lesen Sie den Beweis (folgende Seite) dafür zunächst einmal durch und widmen Sie sich dann den Leitfragen bzw. –aufgaben.

Der Beweis als Ganzes 1:

- Bei einer Äquivalenz: Welche Aussage wird bewiesen und um welche Art von Äquivalenzbeweis handelt es sich (beidseitige Implikation)?

[5] Einen ausführlicheren Kommentar dazu finden Sie in der Lösung.

- Um welche Art von Beweis handelt es sich? (bspw. direkt, Widerspruch, Kontraposition, vollständige Induktion)
- Gliedern Sie den Beweis in für Sie direkt ersichtliche Beweisschritte.

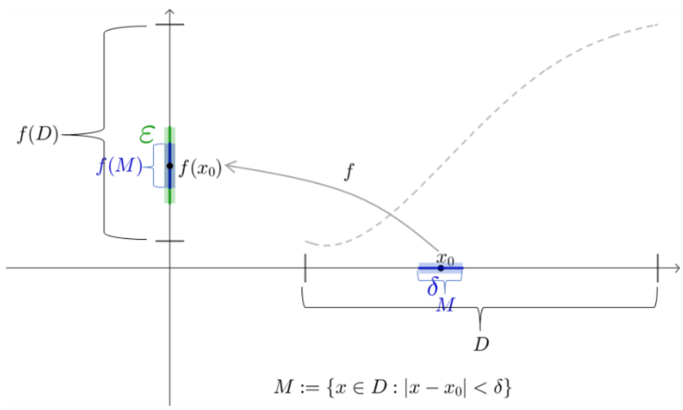
Die einzelnen Beweisschritte:

- Versuchen Sie, die einzelnen Schritte zu verstehen.
  - Werden Sätze oder Definitionen als Argumente verwendet, so sehen Sie sich diese ggf. noch einmal an.
  - Fügen Sie ggf. neu hinzugekommene Definitionen und Variablen in ihre Skizze vom Satz mit ein.
  - Interpretieren Sie vorkommende Terme und Gleichungen im konkreten Kontext.
    - Was bedeutet die Hilfsfunktion?
- Betrachten Sie nun die einzelnen Schritte in ihrer Verknüpfung. Welcher Schritt basiert auf welchem bzw. geht in welchen ein?
- An welchen Stellen gehen die Voraussetzungen des Satzes genau ein und warum sind die notwendig?

**Wichtig:** Der Beweis als Ganzes 2:

- Betrachten Sie den Beweis erneut als Ganzes. Was würden Sie als die **zentrale Idee** des Beweises ansehen? Bei welchen Aspekten handelt es sich eher um Nebenargumentationen?
- Verfolgen Sie die zentrale Idee. **Wie könnte man auf diese gekommen sein** (bspw. durch eine Visualisierung, ein bestimmtes Beispiel, eine Termumformung, eine Ähnlichkeit zu einem anderen Satz…)?[6]

*Beweis:*



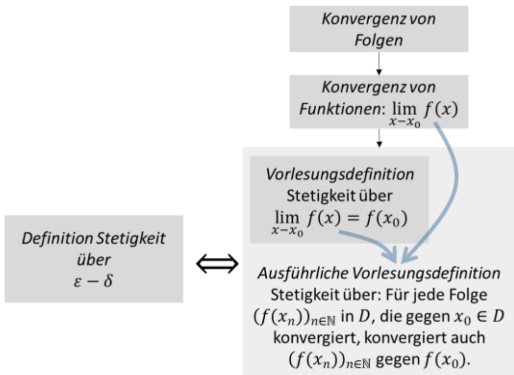

„$\varepsilon - \delta$-Definition $\Longrightarrow$ ausführliche Vorlesungsdefinition“
Wegen der $\varepsilon - \delta$ -Stetigkeit der Funktion in $x_0$ findet man zu jeder $\varepsilon$-Umgebung von $f(x_0)$ eine $\delta$-Umgebung um $x_0$, sodass die $\delta$-Umgebung in die $\varepsilon$-Umgebung abgebildet wird: für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D$, die gegen $x_0$ konvergiert. Nun betrachtet man die Folge der Funktionswerte: $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Es ist zu zeigen, dass diese Folge gegen $f(x_0)$ konvergiert. Man sucht also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
Sei also $\varepsilon > 0$. Wegen der $\varepsilon - \delta$ –Stetigkeit gibt es dazu ein $\delta > 0$, sodass die $\delta$-Umgebung um $x_0$ in die $\varepsilon$-Umgebung um $f(x_0)$ abgebildet wird. Insbesondere werden alle Glieder der Folge $x_n$, die in der $\delta$-Umgebung von $x_0$ liegen, in die $\varepsilon$-Umgebung von $f(x_0)$ abgebildet (denn $f(M)$ ist Teil der $\varepsilon$-Umgebung). Weil $x_n$ gegen $x_0$ konvergiert, liegen in jeder $\delta$-Umgebung von $x_0$ alle Folgenglieder ab einem $n_\delta \in N$. Das bedeutet also: Ab einem $n_\delta \in \mathbb{N}$ liegen alle $f(x_n)$ mit $n \geq n_\delta$ innerhalb der $\varepsilon$-Umgebung von $f(x_0)$. Und das genau bedeutet, dass $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

[6] Es lohnt sich, diese Frage zu stellen (auch wenn man nicht sicher sein kann), da sie die Lücke zwischen der Ausgangssituation, dem Vorliegen des Satzes, zur Endsituation, dem Vorliegen des Beweises, adressiert und zwar aus Ihrer individuellen Perspektive.

„ausführliche Vorlesungsdefinition $\Longrightarrow \varepsilon - \delta$-Definition"
Die umgekehrte Richtung überlegt man sich mittels eines Widerspruchsbeweises: Wir gehen also davon aus, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D$, die gegen $x_0$ konvergiert, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert und die Funktion nicht $\varepsilon - \delta$-stetig ist.
Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ existiert, sodass $x$ zwar in der $\delta$-Umgebung von $x_0$ liegt ($|x - x_0| < \delta$), aber $f(x)$ außerhalb der $\varepsilon$-Umgebung von $f(x_0)$ liegt, also einen Abstand größer als $\varepsilon$ von $f(x_0)$ hat ($|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.
Da es für alle $\delta$ ein solches $x_\delta$ gibt, kann man also beliebig nahe an $x_0$ „herangehen", man findet immer wieder $x_\delta$, für die $f(x_\delta)$ einen größeren Abstand zu $f(x_0)$ hat als $\varepsilon$. Mit anderen Worten: Man kann sich dadurch eine Folge konstruieren, die gegen $x_0$ konvergiert, die Folge der Funktionswerte konvergiert aber nicht gegen $f(x_0)$: Man lässt dazu $\delta$ einfach „immer kleiner werden" und „gegen 0 laufen". Sei also $\delta_n := \frac{1}{n}$. Dann existiert für jedes $\delta_n$ ein $x_n$ mit $0 \leq |x_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Wegen $\delta_n \to 0$ und dem Sandwichkriterium gilt auch $x_n \to x_0$, gleichzeitig aber sind die Bilder der Folge immer mindestens $\varepsilon$ von $f(x_0)$ entfernt, konvergieren also nicht gegen $f(x_0)$, was aber der Voraussetzung widerspricht. Damit muss $f$ $\varepsilon - \delta$-stetig in $x_0$ sein.

## Zusammenfassung

Wir haben in diesem Teil die Stetigkeitsdefinition über $\varepsilon - \delta$ mit der Definition von Stetigkeit über die Konvergenz von Funktionen aus der Vorlesung verbunden. Dabei haben wir vor allem darauf zurückgegriffen, den Begriff der Konvergenz von Funktionen durch seine Definition mittels Folgen zu nutzen.




f) *Fassen Sie die Erkenntnisse dieses Teils zusammen, indem Sie alle äquivalenten Definitionen für Stetigkeit noch einmal ausformulieren:*

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

($\varepsilon - \delta$-Definition)

(Definition aus der Vorlesung – Definition über Konvergenz)

(ausführliche Vorlesungsdefinition – Folgenstetigkeit)

g) *Welche „saloppe" Formulierung könnten Sie auf Basis der Definition über Konvergenz bzw. Folgenstetigkeit noch für Stetigkeit nutzen?*

Typologie der Gegenbeispiele: Auf welche Weise kann ein konkretes Objekt zum Gegenbeispiel werden?

https://bit.ly/31HGPPE

### 8) Aufgabe: Arten von Unstetigkeit

Mit der alternativen Definition von Stetigkeit über den Grenzwert kann man nun die „Arten von Unstetigkeit“ formal etwas besser beschreiben:

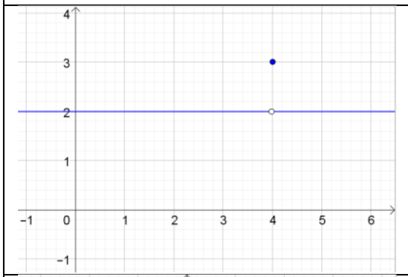
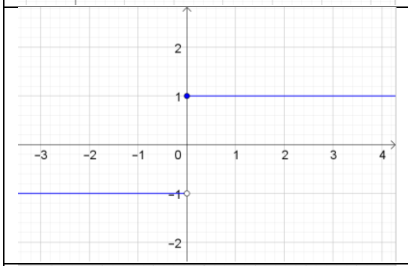
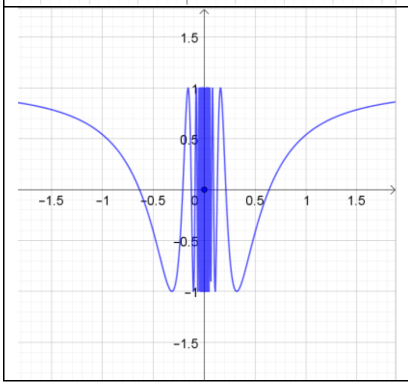
Die Definition von Stetigkeit über den Grenzwert von Funktionen verlangt, dass $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt. Dabei genügt es eigentlich, dass $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert, daraus folgt dann automatisch, dass der Grenzwert auch gleich $f(x_0)$ ist.

Das kann man sich leicht verdeutlichen, denn wenn der Grenzwert $c$ existiert, dann gilt für *alle* Folgen im Definitionsbereich, die gegen $x_0$ konvergieren, dass die Folge der Funktionswerte gegen den Grenzwert $c$ konvergiert. Insbesondere also für die konstante Folge $x_n = x_0$ (für alle $n \in \mathbb{N}$), denn die Folge liegt im Definitionsbereich, da $x_0 \in D$ und konvergiert gegen $x_0$. Für diese Folge gilt aber $f(x_n) = f(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also konvergiert diese gegen $f(x_0)$ und damit ist $c = f(x_0)$.

***Eine Funktion ist also unstetig, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x)$ nicht existiert.***

Das ist zum Beispiel dann der Fall, wenn der rechts- oder linksseitige Grenzwert nicht existieren oder nicht übereinstimmen. Das ist allerdings nur eine Implikation. Es kann also auch sein, dass der Grenzwert nicht existiert, obwohl rechtseitiger und linksseitiger Grenzwert existieren und übereinstimmen (s.u.).

*Betrachten Sie erneut die folgenden Funktionen und beschreiben Sie, inwiefern der Grenzwert* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *nicht existier:*

| Graph | Vorschrift | Inwiefern ist Definition von Stetigkeit über Konvergenz verletzt? |
|---|---|---|
|  | $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \begin{cases} 3 & x = 4 \\ 2 & sonst \end{cases}$ | |
|  | $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ | |
|  | $f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ | |

Wie kann nachgewiesen werden, dass ein konkretes Objekt die geforderten Eigenschaften erfüllt bzw. nicht erfüllt?

### 9) Aufgabe: Stetigkeit und Unstetigkeit nachweisen

Die bisherigen Betrachtungen von stetigen und unstetigen Funktionen fokussierten immer eine anschauliche Begründung, die nicht formalisiert werden musste. Für einen Beweis muss über die Definitionen begründet werden, warum die definierende Eigenschaft zutrifft (im Fall der Stetigkeit) oder verletzt wird (im Fall der Unstetigkeit), oder aber man kann weitere Eigenschaften stetiger Funktionen nutzen.

Mit den verschiedenen Definitionen stehen nun verschiedene Wege offen, Stetigkeit oder Unstetigkeit nachzuweisen.

*a) Füllen Sie die leeren Felder in der Tabelle aus, indem Sie sich überlegen, was genau Sie tun müssen, um mit Hilfe der entsprechenden Definition Stetigkeit oder Unstetigkeit nachzuweisen.*

| | **Stetigkeit nachweisen** | **Unstetigkeit nachweisen** |
|---|---|---|
| **$\varepsilon - \delta$-Definition** | Man muss zeigen, dass es zu jedem beliebigen $\varepsilon$ ein $\delta$ gibt, sodass für alle $x$ im Definitionsbereich, die $\|x - x_0\| < \delta$ erfüllen, auch $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ gilt.<br><br>Konkret bedeutet das meist: Man lässt $\varepsilon > 0$ beliebig und sucht in Abhängigkeit von $\varepsilon$ und $x_0$ ein $\delta > 0$, dass die genannte Eigenschaft erfüllt. | |
| **Definition über Konvergenz** | | Man muss zeigen, dass der Grenzwert der Funktion nicht existiert. |
| **Definition über Folgen** | Man muss zeigen, dass für jede Folge$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $x_0$ konvergiert, die Funktionswerte der Folge gegen $f(x_0)$ konvergieren.<br><br>*Man kann also die Grenzwertsätze für Folgen nutzen, um Stetigkeit nachzuweisen.* | |

**Ergänzung: Beispiele**

Im Dokument „(Un-)stetigkeit nachweisen“ finden Sie auch Musterbeispiele für jeden Fall und eine Übungsaufgabe. Es wurde darüber hinaus versucht, eine „verallgemeinerte Strategie“ darzustellen. Es gibt aber kein festes Verfahren, das immer zum Ziel führen würde und auch die vorgestellte „verallgemeinerte Strategie“ kann für konkrete Funktionen gegebenenfalls nur sehr schwierig umzusetzen sein.

### Stetigkeit mit Hilfe von Verknüpfungen

Die enge Verknüpfung der Stetigkeit mit der Konvergenz von Funktionen bzw. Folgen deutet schon darauf hin, dass man hier ganz ähnliche Aussagen über die Verknüpfung stetiger Funktionen tätigen kann wie bei konvergenten Funktionen bzw. Folgen. Insbesondere der Nachweis der Stetigkeit mittels der Grenzwertsätze für die Funktion zeigt dies ganz deutlich. Hier wird die Stetigkeit einer zusammengesetzten Funktion im Prinzip auf die Stetigkeit der Einzelfunktionen mittels Grenzwertsätzen zurückgeführt:

Beispiel: Nachweis der Stetigkeit der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$ auf ihrem Definitionsbereich unter Ausnutzung der Grenzwertsätze:

$$\lim_{x \to x_0} (x^2 + x) = \lim_{x \to x_0} x^2 + \lim_{x \to x_0} x = \left(\lim_{x \to x_0} x\right)^2 + \lim_{x \to x_0} x = x_0^2 + x_0.$$

Damit gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0^2 + x_0 = f(x_0)$ für alle $x_0 \in D$.

Man kann also die folgenden Sätze für Verknüpfungen stetiger Funktionen vermuten:

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$. Sind $f: D \to \mathbb{R}$ und $g: D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen in $x_0 \in D$, so sind
  - $f + g$ stetig in $x_0$
  - $\lambda \cdot f$ stetig in $x_0$
  - $f \cdot g$ stetig in $x_0$
  - $|f|$ stetig in $x_0$
  - $\frac{f}{g}$ stetig in $x_0$ mit $\frac{f}{g}: \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ mit $\widetilde{D} = \{x \in D: g(x) \neq 0\}$, wenn zusätzlich noch $g(x_0) \neq x_0$
- Seien $D, W \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$. Sind $f: D \to \mathbb{R}$ und $g: W \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq W$ sowie $f$ stetig in $x_0 \in D$ und $g$ stetig in $f(x_0) \in W$, dann ist die Hintereinanderausführung der Funktionen

$$g \circ f: D \to \mathbb{R}$$

  in $x_0$ stetig. ($g \circ f$ bedeutet: $g(f(x))$).

Unter Berücksichtigung entsprechender Definitionsbereiche und Voraussetzungen ist die **Addition,**

**Vervielfachung,**

**Multiplikation,**

**Division,**

**Betragsbildung und**

**Hintereinanderausführung**

stetiger Funktionen wieder stetig.

Daraus folgt: Der Nachweis der Stetigkeit einer Funktion kann durch die Verknüpfung stetiger Funktionen begründet werden:

**Beispiel:**

Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$,

denn: $f(x) = g(x) \cdot |g(x)|$ mit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x$.

Da $g$ stetig ist auf $\mathbb{R}$, ist auch $|g|$ stetig sowie die multiplikative Verknüpfung der beiden Funktionen $g \cdot |g| = f$. Also ist auch $f$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

b) *Weisen Sie einen der Sätze für Verknüpfungen stetiger Funktionen nach, indem Sie auf den entsprechenden Sätzen über die Verknüpfung von Folgen oder konvergenten Funktionen aufbauen.*

c) *Begründen Sie durch Anwendung der obigen Sätze die Stetigkeit von* $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{4 \cdot |x|^3 + x}{x}$ *auf dem ganzen Definitionsbereich.*

**Stetigkeit und Unstetigkeit mit Hilfe der Definitionen nachweisen - Beispiele**

**Stetigkeit nachweisen (Definition aus der Vorlesung – Definition über Konvergenz)**

In einigen Fällen kann man sehr gut die Grenzwertsätze für Funktionen nutzen, um die Stetigkeit einer Funktion zu überprüfen. Man überprüft dazu, ob der Grenzwert existiert (und gleicht diesen mit dem Funktionswert an der Stelle ab).[1]

**Skizze zur Beweisfindung:**

1) Bestimmung von $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ mit Hilfe der Grenzwertsätze*. (das ist die „Hauptschwierigkeit")
2) Bestimmung von $f(x_0)$ und Aufzeigen der Gleichheit durch Vergleich von $f(x_0)$ mit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

*Hilfreich sind: Existieren $\lim\limits_{x-x_0} f(x) =: F$ und $\lim\limits_{x-x_0} g(x) =: G$, so gilt auch

$\lim\limits_{x-x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = F+G,$

$\lim\limits_{x-x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = F\cdot G,$

$\lim\limits_{x-x_0}|f(x)| = |F|, \lim\limits_{x-x_0} \lambda\cdot f(x) = \lambda \cdot F$

sowie $\lim\limits_{x-x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$, sofern $g(x)$ nicht gegen Null konvergiert.

**Beispiel 1:** Die Stetigkeit der Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1 \\ 2 & x = 1\end{cases}$$

auf ihrem Definitionsbereich soll nachgewiesen werden.

1) Wir bilden den Grenzwert für $x_0 = 1$:
   Für $x \neq 1$ gilt: $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x+1$.
   Also: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2 = f(1)$.
2) Wir bilden den Grenzwert für $x_0 \neq 1$ unter Ausnutzung der Grenzwertsätze:
   $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-1}{x-1}$$
   Mit $g_1(x) = x^2-1$ , $g_2(x) = x-1$. Dann ist $g_2(x_0) \neq 0$ $(da\ x_0 \neq 1)$ und die Regel für die Division kann angewandt werden:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} x^2-1}{\lim\limits_{x\to x_0} x-1} = \frac{(x_0^2-1)}{x_0-1} = f(x_0)$$

Damit gilt für alle Elemente des Definitionsbereiches: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ und die Funktion ist stetig auf dem gesamten Definitionsbereich.

*Anmerkung:* Damit ist auch klar, dass die Funktion in $x_0 = 1$ immer unstetig wäre, wenn $f(x_0) = f(1) \neq 2$ gelten würde.

**Beispiel 2:** Die Stetigkeit der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 8\cdot|x^2+4|+6$ auf ihrem Definitionsbereich soll nachgewiesen werden. Wir bilden wieder den Grenzwert unter Ausnutzung der Grenzwertsätze:

$$\lim_{x\to x_0}(8\cdot|x^2+4|+6) = 6+8\cdot\lim_{x\to x_0}(|x^2+4|) = 6+8\cdot\left|\lim_{x\to x_0}(x^2+4)\right| = 6+8\cdot\left|\lim_{x\to x_0}(x^2)+4\right| = 6+8\cdot\left|\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^2+4\right| = 6+8\cdot|x_0^2+4| = f(x_0).$$

***Aufgabe 1:***

*Weisen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze nach, dass die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2+x$ auf ihrem Definitionsbereich stetig ist.*

[1] Wie im Material erläutert, muss der Grenzwert gleich dem Funktionswert sein, wenn er existiert, da $x_0 \in D$ liegt.

## Stetigkeit nachweisen ($\varepsilon - \delta$-Definition)

Um Stetigkeit mit der $\varepsilon - \delta$-Defintion nachzuweisen, muss gezeigt werden, dass die definierende Eigenschaft zutrifft.

Man wählt also $\varepsilon > 0$ beliebig. Nun versucht man, meist in Abhängigkeit von $\varepsilon$ und $x_0$, ein $\delta > 0$ zu finden, sodass man $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ aus $|x - x_0| < \delta$ folgern kann (denn die Ungleichung $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ soll ja nur für die $x \in D$ gelten, die $|x - x_0| < \delta$ erfüllen). Insgesamt möchte man eine Ungleichungskette in der folgenden Art entwickeln:

$$|f(x) - f(x_0)| < \cdots < \cdots < \cdots < \varepsilon$$

Man startet dabei ganz links bei einer Verknüpfung von Konstanten (wie Zahlen und $x_0$) mit der Variable $x$ und muss durch Abschätzungen $\varepsilon$ erlangen. Das Mittel, dass man dafür zur Verfügung hat, ist die Wahl von $\delta$ (meist wählt man $\delta$ kleiner oder gleich einer Verknüpfung aus $\varepsilon$ und $x_0$). Hilfreich ist es also durch Termumformungen und Abschätzungen $|x - x_0|$ zu erzeugen, welches man durch $\delta$ abschätzen kann, wodurch man $\varepsilon$ in die Ungleichung bekommt und das „$x$“ herausbekommt.

**Skizze zur Beweisfindung:**

1) Wenn bereits möglich: Aus anschaulichen (oder anderen) Gründen eine Abschätzung für $\delta$ (meist in Abhängigkeit von $\varepsilon$ und $x_0$) treffen bzw. direkt mit 2) beginnen.
2) $|f(x) - f(x_0)|$ aufschreiben und versuchen, durch Umformungen und Abschätzungen $|x - x_0|$ zu erzeugen und $x$ insgesamt aus der Gleichung „herauszuschätzen“. (durch Nutzung von $|x - x_0| < \delta$ bzw. $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$).*
3) Gibt es eine Abschätzung aus 1), dann weiter mit 4), sonst: Sind alle $x$ aus der Ungleichung „verschwunden“, dann den Term der letzten Abschätzung gleich $\varepsilon$ setzen und nach $\delta$ auflösen. Daraus die Abschätzung für $\delta$ gewinnen.
4) Abschätzung für $\delta$ in der Ungleichung nutzen und prüfen, dass man am Ende $\leq \varepsilon$ erhält.

* Es kann vorkommen, dass man vielleicht „zu grob“ abschätzt und das am Ende auch durch die Wahl des $\delta$ nicht mehr korrigieren kann (bspw. bei $\delta + 1 \leq \varepsilon$). Dann kann man diese Abschätzung so nicht nutzen.

Präziser ist es also das Ziel, eine Ungleichungskette folgender Art zu erzeugen:

$$|f(x) - f(x_0)| < \cdots < (\ldots)|x - x_0| < (\ldots)\delta < \cdots < \varepsilon$$

Die Kernfrage ist immer, wie man ein solches $\delta$ findet. Hierfür gibt es kaum eine allgemeine Lösungsformel. Neben *algebraischen Umformungen und Abschätzungen*, die vielleicht einen Ansatz liefern können, ist es manchmal auch hilfreich, sich (zumindest in der Vorstellung) ein *„Bild“ von der Funktion* zu machen.

**Beispiel 1 (über einen algebraischen Ansatz):**

Wir möchten zeigen, dass $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ stetig ist auf ihrem Definitionsbereich. Wir zeigen hier gleich allgemein die Stetigkeit für ein beliebiges $x_0$.

Sei also $x_0 \in D = \mathbb{R}$.

Sei $\varepsilon > 0$.

Nun suchen wir ein $\delta$, um eine Ungleichungskette folgender Art zu erzeugen:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| < \cdots < (\ldots)|x - x_0| < (\ldots)\delta < \cdots < \varepsilon$$

**Nützliche algebraische „Werkzeuge“:**

- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (durch quadratische Ergänzung auch herstellbar)
- $a^2 + b^2 \leq (a + b)^2$ (für $a \geq 0, b \geq 0$)
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)
- $\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ (Erweiterung Dreiecksungleichung)
- $|a| = \sqrt{a^2}$
- $\frac{1}{|a|} \leq \frac{1}{|b|}$ wenn $|b| \leq |a|$ (Nenner verkleinern, um Bruch zu vergrößern).
- $|x - x_0| < \delta$ bedeutet $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bzw. $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

Wir könnten uns hier nun erst einmal 1) widmen und aus anschaulichen oder anderen Gründen eine Abschätzung suchen, dies soll aber ein Beispiel für einen rein algebraischen Ansatz sein, daher starte wir mit 2):

2) Wir führen Termumformungen durch, um $|x - x_0|$ zu erzeugen, was in diesem Fall über die binomischen Formeln recht leicht ist:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0|$$

Nun können wir bereits die Abschätzung $|x - x_0| < \delta$ nutzen und tun an dieser Stelle so, als würden wir $\delta$ schon kennen. Wir sehen dann, was sich daraus ergibt und schließen auf $\delta$ zurück.

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq \delta \cdot |x + x_0|$$

Nun haben wir noch den Term $|x + x_0|$ übrig. Auch hier erzeugen wir wieder $|x - x_0|$ durch Addition einer „0“:

$$|x^2 - x_0^2| \leq \delta \cdot |x + x_0| = \delta \cdot |x - x_0 + x_0 + x_0| = \delta \cdot |(x - x_0) + 2x_0|$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$$|x^2 - x_0^2| \leq \delta \cdot |x + x_0| = \delta \cdot |(x - x_0) + 2x_0| \leq \delta \cdot (|x - x_0| + 2|x_0|)$$

Wir haben erneut ein $|x - x_0|$ erzeugt und können nun weiter abschätzen:

$$|x^2 - x_0^2| \leq \delta \cdot |x + x_0| \leq \delta \cdot (|x - x_0| + 2|x_0|) \leq \delta \cdot (\delta + 2|x_0|) = \delta^2 + 2\delta|x_0| \quad (*)$$

3) Nun haben wir einen Term, der nur noch von Konstanten (2 und $|x_0|$) abhängt und von $\delta$, welches wir ja noch setzen dürfen. Es soll also gelten:

$$\delta^2 + 2\delta|x_0| \leq \varepsilon$$

Wir überlegen uns zunächst für welches positive $\tilde{\delta}$ Gleichheit gilt, was dem Lösen einer quadratischen Gleichung entspricht: $\tilde{\delta}^2 + 2\tilde{\delta}|x_0| - \varepsilon = 0$. Dies ist für $\tilde{\delta} = -|x_0| \pm \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2}$ der Fall. Das negative Ergebnis entfällt, da $\delta$ und $\tilde{\delta}$ positiv sein sollen. Wählt man $\delta \leq \tilde{\delta}$, so ist die Ungleichung weiter erfüllt, da nur positive Werte miteinander verknüpft werden. Folglich sollte man $\delta$ wir folgt wählen: $0 < \delta \leq \tilde{\delta} = -|x_0| + \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2}$.

4) Damit führen wir auch die obige Ungleichung zum Ziel:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| &\leq \cdots \leq \delta^2 + 2\delta|x_0| \\ &\leq \left(-|x_0| + \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-|x_0| + \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2}\right) \cdot |x_0| \\ &= |x_0|^2 - 2 \cdot |x_0| \cdot \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2} + (\varepsilon + |x_0|^2) - 2|x_0|^2 + 2 \cdot |x_0| \cdot \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Auf diese Weise ergeben sich am Ende zwar lange Terme, diese sollten sich am Ende aber auflösen, da $\delta$ ja genau so gewählt ist.

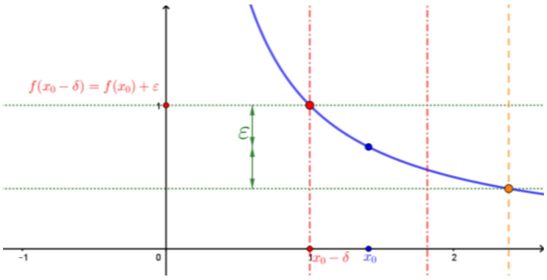
**Anmerkung:** Oft beginnt ein Stetigkeitsnachweis über die $\varepsilon - \delta$-Definition mit „Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ (o.ä.)“ und es folgt eine Ungleichungskette, die direkt zur Lösung führt. Startet man mit einer (bspw. aus der Anschauung heraus) begründeten Überlegung zu $\delta$, entspricht das auch dem Entwicklungsprozess. Versucht man aber durch algebraische Umformungen eine Idee für ein passendes $\delta$ zu bekommen, so verläuft der Entwicklungsprozess mitunter genau anders herum. Man startet dann mit der Ungleichungskette und überlegt sich darauf basieren ein geeignetes $\delta$.

**Beispiel 2 (über einen anschaulichen Ansatz):**

Wir möchten zeigen, dass $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ stetig ist auf $\mathbb{R}^+$. Wir zeigen hier gleich allgemein die Stetigkeit für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

Sei also $x_0 \in D = \mathbb{R}^+$.

1) Hat man ein gutes „Bild“ von $f(x) = \frac{1}{x}$, so „weiß“ man, dass $f(x)$ monoton fallend ist für $x \in \mathbb{R}^+$. Hält man nun ein $x_0$ fest, so erkennt man auch, dass man für ein beliebiges $\varepsilon$ das $\delta$ immer in Abhängigkeit von der Abweichung nach „links“ suchen muss, da man hier den kritischen Bereich „zuerst“ verlässt (was damit zusammenhängt, dass die betragsmäßige Steigung der Funktion „links“ von $x_0$ immer größer ist als „rechts“).[2]




Wir suchen also ein $\delta$, sodass der $f(x_0 - \delta)$ um maximal $\varepsilon$ von $f(x_0)$ „nach oben“ abweicht, wobei $\delta < x_0$ gelten muss, sonst liegt $x_0 - \delta$ nicht im Definitionsbereich. Die Frage ist also: Für welches $\tilde{\delta}$ gilt: $f\left(x_0 - \tilde{\delta}\right) = f(x_0) + \varepsilon$ ? Was gleichbedeutend ist mit:

$$\frac{1}{x_0 - \tilde{\delta}} = \frac{1}{x_0} + \varepsilon$$

Auflösen der Gleichung nach $\tilde{\delta}$ ergibt: $\tilde{\delta} \leq \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{1+\varepsilon \cdot x_0}$. Da immer gilt $\frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{1+\varepsilon \cdot x_0} = \frac{\varepsilon \cdot x_0}{1+\varepsilon \cdot x_0} \cdot x_0 \leq 1 \cdot x_0 = x_0$, ist dieses eine stärkere Einschränkung von $\delta$ als $\delta < x_0$. Wir wählen also: $\delta \leq \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{1+\varepsilon \cdot x_0}$

2) +4) Damit können wir die folgende Ungleichung aufstellen:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}\right| \leq \frac{\delta}{|x| \cdot |x_0|} \overset{(*)}{\lesseqgtr} \frac{1}{|x_0 - \delta| \cdot |x_0|} \cdot \delta \overset{(*)}{\lesseqgtr} \frac{1}{x_0 - \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{1 + \varepsilon \cdot x_0}} \cdot \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{1 + \varepsilon \cdot x_0}$$
$$= \frac{\varepsilon \cdot x_0 \cdot (1 + \varepsilon \cdot x_0)}{(x_0 + \varepsilon \cdot x_0^2 - \varepsilon \cdot x_0^2) \cdot (1 + \varepsilon \cdot x_0)} = \varepsilon$$

(*): Diese Abschätzungen sind möglich, weil $x_0 > 0$ und $\delta < x_0$, womit auch $|x_0 - \delta| = x_0 - \delta > 0$ ist und ebenso $|x| = x > x_0 - \delta > 0$. Sowie $x_0 - \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{1+\varepsilon \cdot x_0} \geq x_0 - \delta > 0$

***Aufgabe 2:***

*Weisen Sie die Stetigkeit der Funktion*

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 2|$

*an der Stelle $x_0 = 1$ nach.*

---

[2] Diese Argumentation ist rein anschaulicher Natur. Natürlich könnte man das auch alles zeigen, das ist in diesem Fall aber gar nicht notwendig, da es ja „nur“ um die Entwicklung einer Idee für die Abschätzung von $\delta$ geht, die nicht sauber ausformuliert sein muss. Ist unsere Vorstellung nicht richtig oder nicht exakt genug, dann funktioniert der auf dieser Idee basierende Beweis später vielleicht einfach nicht.

**Unstetigkeit nachweisen ($\varepsilon - \delta$-Definition)**

Um mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$-Kriteriums Unstetigkeit nachzuweisen, muss man zeigen, dass das Kriterium verletzt ist, was bedeutet, dass es mindestens ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass man <u>kein</u> $\delta > 0$ findet, bei dem für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Mit anderen Worten: Es gibt mindestens ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $\delta > 0$ gilt: Es gibt mindestens ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, für das $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$ gilt.

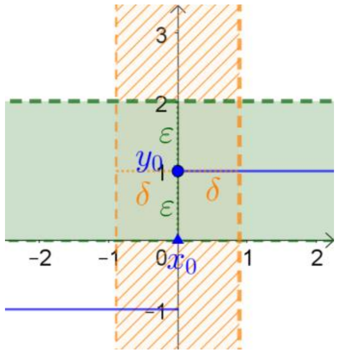
**Skizze zur Beweisfindung:**

1) Wenn bereits möglich: Bspw. aus anschaulichen Gründen ein $\varepsilon$ festlegen.
2) $\delta > 0$ beliebig lassen und ein $\tilde{x}$ (meist in Abhängigkeit von $\delta$) suchen, für das $|x - x_0| < \delta$ aber $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$ gilt.

<u>*Zielstellung:*</u> Man muss also ein $\varepsilon > 0$ finden, bei dem man unabhängig vom $\delta$ immer ein Element innerhalb der $\delta$-Umgebung von $x_0$ findet, welches aus dem kritischen Bereich herausreicht.

Ein solcher Beweis eignet sich besonders gut, wenn man durch das „Bild" der Funktion bereits eine Idee für ein solches $\varepsilon$ hat.

**Beispiel:** Zu zeigen ist, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ unstetig ist in $x_0 = 0$.




1) Aufgrund des „Bildes" der Funktion (machen Sie sich kurz eine Skizze) kann man schon erkennen, dass die Funktion bei $x_0 = 0$ von „-1" auf „1" „springt". Sobald $\varepsilon$ also echt kleiner wird als 2, ist es egal, wie klein man $\delta$ wählt, man hat für jede $\delta$-Umgebung um $x_0 = 0$ sofort Elemente enthalten, die echt kleiner sind als 0 und deren Funktionswert daher „-1" ist, was außerhalb der $\varepsilon$-Umgebung um $f(x_0) = 1$ liegt.

   Genau das ist auch die Beweisidee:

   Man wählt $\varepsilon < 2$, also zum Beispiel $\varepsilon = 1$.

2) Sei nun $\delta > 0$ beliebig. Wir finden nun auf jeden Fall Elemente, die innerhalb der $\delta$-Umgebung um $x_0$ liegen und gleichzeitig außerhalb der $\varepsilon$-Umgebung – nämlich genau alle Werte, für die gilt:

   $x_0 - \delta < \bar{x} < 0$, wegen $x_0 = 0$ bedeutet das: $-\delta < \bar{x} < 0$

   Sei also $\bar{x} \in (-\delta, 0)$ (Alternativ könnte man auch $\bar{x} = -\frac{\delta}{2}$ setzen) . Dann gilt einerseits:
   $|\bar{x} - x_0| = |\bar{x} - 0| = |\bar{x}| < \delta$

   Gleichzeitig ist $\bar{x} < 0$ und damit $f(\bar{x}) = -1$. Damit gilt:

   $|f(\bar{x}) - f(x_0)| = |-1 - 1| = 2 > 1 = \varepsilon$

   Wir haben also für jede Wahl von $\delta$ Elemente $(\bar{x})$ gefunden, die innerhalb der $\delta$-Umgebung um $x_0$ liegen, aber nicht innerhalb der $\varepsilon$-Umgebung um $f(x_0)$.

***Aufgabe 3:***

*Weisen Sie die Unstetigkeit der folgenden Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ mit Hilfe der $\varepsilon - \delta$-Definition nach:*

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3 & , x \neq 2 \\ 6 & , x = 2 \end{cases}$$

## Unstetigkeit nachweisen (Folgendefinition)

Die Definition von Stetigkeit über Folgen, die eng mit der über Konvergenz von Funktionen zusammenhängt, hat hier den Vorteil, dass man nur eine *einzige* Folge finden muss, deren Funktionswerte nicht konvergieren oder nicht gegen den Funktionswert des Grenzwertes konvergieren, um *Un*stetigkeit nachzuweisen.

**Beispiel:** Die Unstetigkeit von $f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_4(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & sonst \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ in $x_0 = 0$ soll nachgewiesen werden.

**Skizze zur Beweisfindung:**

1) Bspw. aus „anschaulichen" Gründen eine Folge suchen, deren Funktionswerte nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren bzw. nicht konvergieren. (Sich dazu „gedanklich" von einer Seite auf $x_0$ zubewegen und schauen, inwiefern man Funktionswerte finden kann, die sich nicht auf $f(x_0)$ zubewegen.)
2) Prüfen bzw. nachweisen, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ nicht existiert oder aber $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$.

1) Aus anschaulichen Betrachtungen wissen wir schon, dass die Funktion „immer schneller zwischen -1 und 1 hin und her schwenkt, je näher man der 0 kommt". Da sich diese Amplitude auch nicht verkleinert, findet man für $\varepsilon < 1$ auch für jede noch so kleine $\delta$-Umgebung um $x_0 = 0$ wieder Werte, die die Amplitude annehmen und daher aus der $\varepsilon$-Umgebung um $f(x_0) = 0$ herausfallen. (An dieser Stelle könnte man auch gut einen Nachweis mit $\varepsilon - \delta$-Kriterium führen, wir schauen aber hier auf das Folgenkriterium).

   Ziel ist es nun, eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu finden, für die einerseits $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = 0$ gilt und andererseits $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0) = 0$.

   Aus dem „Bild" der Funktion (öffnen Sie die Geogebra-Datei aus Aufgabe 1 des Hauptmaterials oder machen Sie sich selbst eine Skizze) ist ersichtlich, dass eine Folge, deren Funktionswerte immer auf dem höchsten Ausschlag der Funktion „sitzen", diese Bedingungen erfüllt, denn die Folge konvergiert dann „anschaulich gesehen" gegen 0, die Funktionswerte sind aber konstant 1 und konvergieren damit gegen 1 (was wir aber noch zeigen müssen, sobald wir die Folge definiert haben).

   Wir suchen also eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1$ für alle Folgenglieder gilt. Dazu nutzen wir unsere Kenntnisse über die „normale" Sinusfunktion ($\sin(x)$). Über den Graphen der Sinusfunktion oder den Einheitskreis können wir rekonstruieren , dass $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ gilt. Ebenso hilft uns die Periode der Sinusfunktion, diese besagt nämlich: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1, k \in \mathbb{Z}$. Wir wissen nun also, dass für die Folge $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ gilt: $\sin(y_n) = 1$ für alle Folgenglieder. Nun suchen wir aber $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1$ für alle Folgenglieder. Wir suchen also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\frac{1}{x_n} = y_n$, also: $x_n = \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$

   Für diese Folge gilt: $f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ und damit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

2) Gleichzeitig ist $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n} = 0$

   (Begründung: Sandwichkriterium und $0 \leq \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n} \leq \frac{1}{n}$ ).

Folglich ist $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = f(0)$. Man hat also eine Folge gefunden, die gegen $x_0$ konvergiert, deren Funktionswerte aber nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren.

**Anmerkung:** Wir sind hier tendenziell so vorgegangen, dass wir eine Folge gesucht haben, deren Funktionswerte nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren. Dass die Folge gegen $x_0$ konvergiert haben wir im Anschluss gezeigt und uns zunächst auf die Anschauung verlassen, dass das so sein könnte, weil wir uns gedanklich auf $x_0$ zubewegt haben. Diese Form des Unstetigkeitsnachweises kann sehr charmant sein, da man nur eine einzige konvergente Folge benötigt, deren Bilder nicht oder nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren, bei allen anderen Folgen könnte das ja weiterhin der Fall sein.

***Aufgabe 4:***

*Weisen Sie die Unstetigkeit der beiden Funktionen an der Stelle* $x_0 = 0$ *nach:*

*a)* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

*b)* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{2x-4}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

# ***Lösungen zu den Aufgaben***

***Aufgabe 1:*** *Weisen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze nach, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$ auf ihrem Definitionsbereich stetig ist.*

Mit den Grenzwertsätzen gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 + x = \lim\limits_{x \to x_0} x^2 + \lim\limits_{x \to x_0} x = \left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)^2 + \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0^2 + x_0$. Damit gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0^2 + x_0 = f(x_0)$.

***Aufgabe 2:*** *Weisen Sie die Stetigkeit der Funktion*

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 2|$

*an der Stelle $x_0 = 1$ nach.*

*Algebraischer Ansatz:*

$$|f(x) - f(1)| = \big||x^2 - 2| - |-1|\big| \underbrace{\leq}_{erw.Dreiecksungleichung} |x^2 - 2 + 1| = |x^2 - 1| = |x - 1| \cdot |x + 1|$$

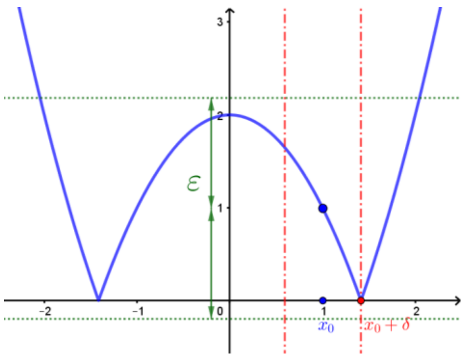
Da ja $|x - 1| < \delta$ gelten soll, folgt:

$$|f(x) - f(1)| = \cdots = |x - 1| \cdot |x + 1| < \delta \cdot |x - 1 + 2| \leq \delta \cdot (|x - 1| + 2) < \delta(\delta + 2)$$

Das soll nun kleiner $\varepsilon$ sein. Das ist der Fall, wenn $\delta$ kleiner ist als die Lösung der Gleichung: $\delta^2 + 2\delta - \varepsilon = 0$. Also mit der pq-Formel folgt: $\delta < \sqrt{1 + \varepsilon} - 1$.

$$|f(x) - f(1)| = \cdots < \delta(\delta + 2) < \left(\sqrt{1 + \varepsilon} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + \varepsilon} - 1 + 2\right) = \left(\left(\sqrt{1 + \varepsilon}\right)^2 - 1\right) = 1 + \varepsilon - 1 = \varepsilon$$

*Ansatz mittels Anschauung:*




Bei der Funktion handelt es sich um eine verschobene Normalparabel, die im Bereich $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ an der x-Achse gespiegelt ist.

$x_0 = 1$ liegt in diesem „gespiegelten" Bereich.

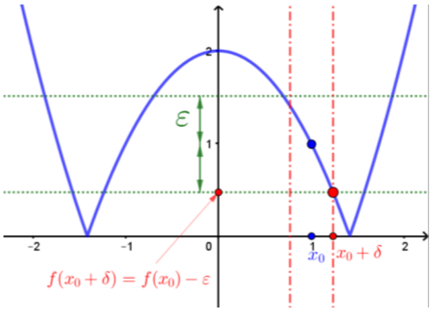
Ist nun $\varepsilon > 1$, so kann man einfach den Schnittpunkt mit der x-Achse für die Berechnung von $\delta$ nehmen: Dabei ist $f(x) = 0$, wenn $x = \pm\sqrt{2}$, wobei an dieser Stelle nur $\sqrt{2}$ von Interesse ist.

Man wähle für $\delta$ dann also: $\delta = \sqrt{2} - 1$

Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - 1| < \delta$:

$$|f(x) - f(1)| = \big||x^2 - 2| - |1 - 2|\big| \underbrace{\leq}_{Dreiecksungleichung} |x^2 - 2 + 1| = |x^2 - 1| = |x - 1| \cdot |x + 1|$$
$$< \delta|x - 1 + 2| \leq \delta(|x - 1| + 2) < \delta(\delta + 2) = \left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} - 1 + 2\right) = 2 - 1 = 1 < \varepsilon$$

Betrachten wir nun $\varepsilon \leq 1$. Da die betragsmäßige Steigung der Parabel mit der Entfernung zu 0 zunimmt, erreicht man „rechts“ von 1 schneller die kritische Grenze als links.




Man sucht also ein $\delta > 0$, sodass: $f(1+\delta) = |(1+\delta)^2 - 2| = 1 - \varepsilon$

Dabei können wir vorab schon $\delta \leq \sqrt{2} - 1$ setzen, da $\varepsilon \leq 1$ sein soll und sonst ggf. schon mit $\delta = \sqrt{2} - 1$ ein Problem entstehen kann.

Damit gilt: $|(1+\delta)^2 - 2| = 2 - (1+\delta)^2$. Wir suchen also ein $\delta \leq \sqrt{2} - 1$ sodass:

$(1+\delta)^2 = 1 + \varepsilon$ und damit $\delta < \sqrt{1+\varepsilon} - 1 \leq \sqrt{2} - 1$, da $\varepsilon \leq 1$.

Analog zu oben kann man dann schließen:

$$|f(x) - f(1)| = \left||x^2 - 2| - |1 - 2|\right| < \delta(\delta + 2) = \left(\sqrt{1+\varepsilon} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1+\varepsilon} - 1 + 2\right) = \left(\left(\sqrt{1+\varepsilon}\right)^2 - 1\right)$$
$$= 1 + \varepsilon - 1 = \varepsilon$$

***Aufgabe 3:***

*Weisen Sie die Unstetigkeit der folgenden Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ mit Hilfe der $\varepsilon - \delta$-Definition nach:*

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 6, & x = 2 \end{cases}$$

Betrachtet man den Graphen der Funktion oder bildet $2^3 = 8$, so erkennt man, dass die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ vom erwarteten Verlauf abweicht. Sobald man mit der Wahl von $\varepsilon$ in die „Lücke“ zwischen 6 und 8 „rutscht“, kann man für jedes $\delta$ sofort Elemente angeben, die außerhalb des gewünschten Bereiches liegen.

Sei also $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$. Man wähle: $x = 2 + \frac{\delta}{2}$

Dann gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\left(2 + \frac{2}{\delta}\right)^3 - 6\right|$$

Da $\left(2 + \frac{2}{\delta}\right)^3 > 2^3 > 6$, gilt $\left(2 + \frac{2}{\delta}\right)^3 - 6 > 0$, die Betragsstriche sind also überflüssig:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\left(2 + \frac{2}{\delta}\right)^3 - 6\right| = \left(2 + \frac{\delta}{2}\right)^3 - 6 > 2^3 - 6 = 8 - 6 = 2 > 1 = \varepsilon$$

Man hat also für jedes $\delta > 0$ ein $x$ innerhalb der $\delta$-Umgebung um $x_0$ gefunden, sodass $f(x)$ nicht innerhalb der $\varepsilon$-Umgebung von $f(x_0)$ liegt.

***Aufgabe 4:***

*Weisen Sie die Unstetigkeit der beiden Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ nach:*

*a)* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

*b)* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{2x-4}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

a) Hier kann man ganz ähnlich vorgehen wie im Musterbeispiel. Auch der Cosinus oszilliert immer schneller, wenn man sich auf $x_0 = 0$ zubewegt. Wir suchen also erneut die Stellen, an denen die 1 erreicht wird:
Es gilt: $\cos(2\pi n) = 1$, für $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.
Ziel ist es also, dass $\frac{1}{x_n} = 2\pi n$ gilt. Wir wählen also $x_n = \frac{1}{2\pi n}$.

Für diese Folge gilt: $f(x_n) = \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos(2\pi n) = 1$ und damit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

Gleichzeitig ist: $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n} = 0$
(Begründung: Sandwichkriterium und $0 \leq \frac{1}{2\pi n} \leq \frac{1}{n}$).

Folglich ist $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = f(0)$. Man hat also eine Folge gefunden, die gegen $x_0 = 0$ konvergiert, deren Funktionswerte aber nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren.

b) Ein Blick auf den Funktionsgraph zeigt (zeichnen bzw. zeichnen lassen), dass die Bilder jeder Folge, die gegen $x_0 = 0$ konvergiert divergieren. Wir nehmen also $x_n = \frac{1}{n}$ als Folge, die gegen $x_0 = 0$ konvergiert und betrachten:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n - 4}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{n} - 4}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2 - 4n = \lim_{n\to\infty} (2-3n) - n < \lim_{n\to\infty} -n$$

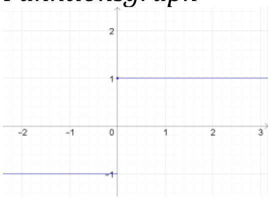
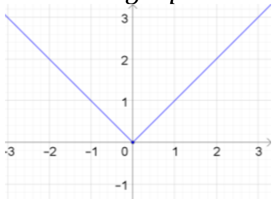
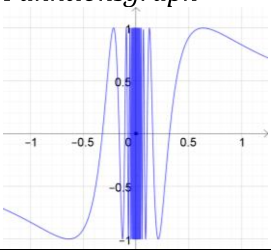
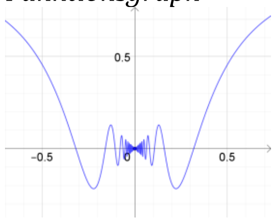
Die Folge divergiert, denn für alle $c < 0$ gilt: $2 - 4n < c$, für $n_0 > n > \frac{2-c}{4}$. Wir haben daher eine Folge gefunden, die gegen $x_0$ konvergiert und deren Bilder nicht konvergieren.

# Stetigkeit - Lösungen

# Teil 1

## 1) Aufgabe: Einstieg

An der zu betrachtenden Stelle $x_0 = 0$ verhalten sich die verschiedenen Funktionen sehr unterschiedlich.

| *Funktionsgraph* | *Funktionsvorschrift* | *Funktionsgraph* | Funktionsvorschrift |
|---|---|---|---|
|  | $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit <br> $f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ |  | $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit <br> $f_2(x) = \lvert x \rvert$ |
| *Funktionsgraph* | *Funktionsvorschrift* | *Funktionsgraph* | *Funktionsvorschrift* |
|  | $f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit <br> $f_3(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ |  | $f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit <br> $f_4(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ |

- Funktion $f_1$ weicht an dieser Stelle vom „erwarteten" Verlauf (von negativen x-Werten kommend) ab und die Funktion macht an dieser Stelle quasi einen „Sprung" von -1 zu 1. Ändert man $x_0 = 0$ nur ein bisschen ins Negative bzw. betrachtet x-Werte, die kleiner Null sind, dann ändert sich der Funktionswert sofort von 1 auf -1. Es ist nicht möglich, den Funktionswert um bspw. maximal 0,5 abzusenken, ganz egal wie klein man die Abweichung von $x_0 = 0$ wählt. Es ist also nicht möglich, dass sich die Funktionswerte bei einer kleinen Veränderung von $x$ nur „ein bisschen" ändern. Nähert man sich an $x_0$ an, so nähert sich also nicht zwangsweise dem Funktionswert $f(x_0)$ an.
- Funktion $f_2$ weicht an dieser Stelle in dem Sinne vom „erwarteten" Verlauf ab, als sich die „gleichmäßige" Bewegung plötzlich ändert. Das hat allerdings einen anderen Charakter als bei $f_1$. Bei $f_2$ führt eine kleine Veränderung von $x_0(= 0)$ „währenddessen" auch nur zu einer kleinen Veränderung des Funktionswertes und für jede beliebige Änderung des Funktionswertes kann – anders als bei $f_1$ – eine Umgebung um $x_0$ gefunden werden, welche maximal diese Änderung erzeugt (bspw. für $f(x) = 0{,}001$ wähle $x = 0{,}001$). Nähert man sich an $x_0$ an, so nähert sich auch der Funktionswert $f(x_0)$ an.
- $f_3$ kann kaum angezeigt werden, weil sie immer schneller oszilliert. Bewegt man sich auf $x_0$ zu, so schwankt die Funktion immer schneller zwischen -1 und 1 hin und her. Verändert man $x_0(= 0)$ nur ein bisschen (also beliebig wenig), so hat sich die Funktion „währenddessen" schon unendlich oft zwischen -1 und 1 hin und her bewegt. Es ist also beispielsweise nicht möglich, durch eine Variation von $x_0$ die Funktionswerte währenddessen nur um weniger als 1 zu verändern, da die Funktion „währenddessen" schon wieder unendlich oft zwischen -1 und 1 hin und her geschwankt ist und damit schon wieder unendlich oft um 1 von $f(x_0) = 0$ abgewichen wäre. Nähert man sich $x_0 = 0$ von einer Seite, so nähern und entfernen siech die Funktionswerte immer, man nähert sich $f(x_0)$ also nicht grundsätzlich immer mehr an, da immer wieder Werte von 1 und -1 angenommen werden.

- $f_4$ kann kaum angezeigt werden, weil sie immer schneller oszilliert. Im Gegensatz zu $f_3$ wird die Amplitude aber immer kleiner, da die Multiplikation mit $x$ die Amplitude verkleinert, wenn man sich der 0 „nähert“[1]. Verändert man $x_0$ ein bisschen, so ändert sich „währenddessen“ auch $f(x_0)$ nur ein bisschen. Nähert man sich $x_0$ von einer Seite, so nähern sich auch die Funktionswerte $f(x_0)$.

## 2) $\varepsilon - \delta -$ Definition

*a)*

| | Findet man für das eingestellte $x_0 = 0$ zu jedem ε ein passendes δ? | Findet man für andere $x_0$ zu jedem ε ein passendes δ? |
|---|---|---|
| $f_1$ | Nein, nicht für $\varepsilon < 2$. (siehe Bild 1) | Für alle $x_0 \neq 0$ findet man zu jedem $\varepsilon$ ein passendes $\delta$. |
| $f_2$ | Ja. | Ja, das gelingt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. |
| $f_3$ | Nein, nicht für $\varepsilon < 1$. (siehe Bild 2) | Für alle $x_0 \neq 0$ findet man zu jedem $\varepsilon$ ein passendes $\delta$.[2] |
| $f_4$ | Ja. | Ja, das gelingt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. |

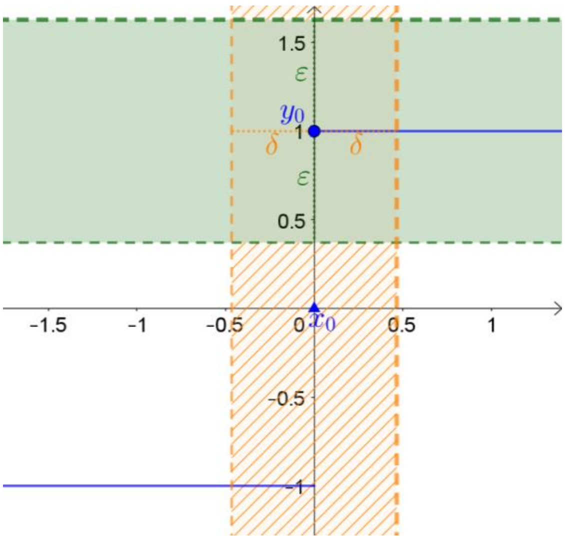



*Bild 1*

[1] Dabei ist anzumerken, dass die „Amplitude“ von $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht an der gleichen Stelle liegt wie die von $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Gemeint ist an dieser Stelle die Amplitude von $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

[2] Es muss aber ggf. weit genug in die Grafik „hineingezoomt“ werden, um das zu erkennen. Stellt man sich die Funktion grafisch vor, so ist völlig klar, dass man sich für $x_0 \neq 0$ in einer „Schwingung“ im Sinne einer Sinusfunktion mit sehr kurzer Periodendauer befindet. Man kann also in der Vorstellung „hineinzoomen“ und wählt dann den entsprechenden Ausschnitt der Periode aus, indem die Funktion sich nur um den vorgegebenen Wert verändert.

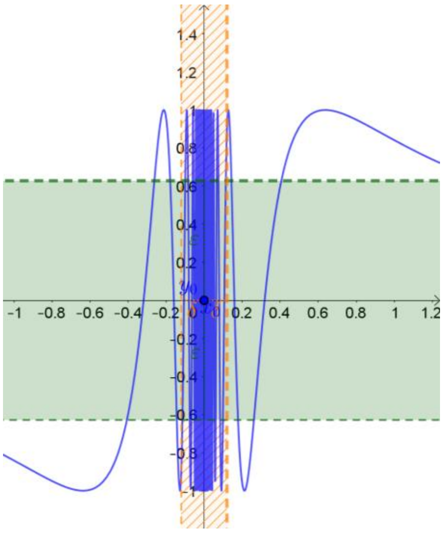



*Bild 2*

## 3) Formulierung und Struktur der Definition

Im Folgenden wird die Definition sehr genau auf verschiedenen Ebenen betrachtet.

*a) Grobstruktur der Definition*

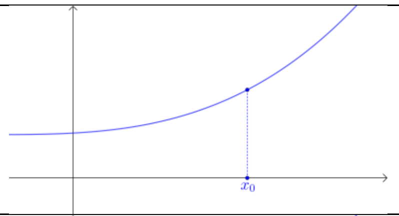
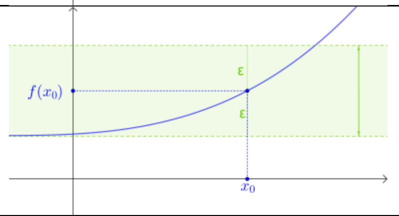
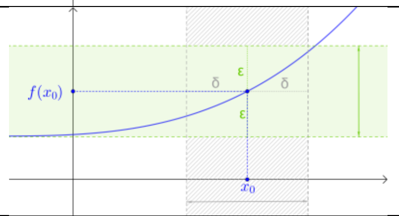
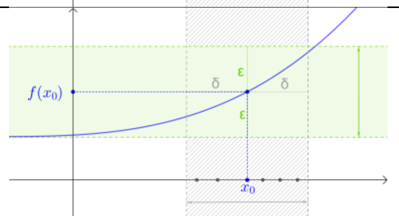
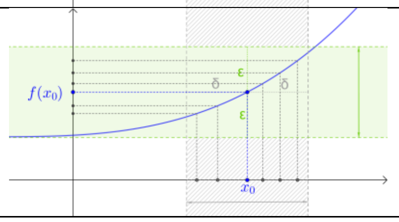
- Über welche Gegenstände wird eine Aussage getroffen?
  Über Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.
- Welcher Begriff wird definiert (Definiendum)?
  Stetigkeit einer Funktion für ein Element $x_0$ aus dem Definitionsbereich; die Frage der Stetigkeit stellt sich also nur für Elemente aus dem Definitionsbereich.
- Welches sind die definierenden Eigenschaften (Definiens)?
  Für alle $\varepsilon$ muss man ein $\delta$ finden, sodass die Funktionswerte aller $x$, die in der $\delta$-Umgebung um $x_0$ liegen, in der $\varepsilon$-Umgebung um $f(x_0)$ liegen.

*b) Die Definition im Detail*

Es handelt sich hierbei um einen Vorschlag, Ihre Bearbeitung kann ganz anders aussehen:

| Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. | Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0$, | $für\ jedes$ $\varepsilon > 0$ | $existiert\ ein$ $\delta > 0, sodass$ | $für\ alle\ x\ aus\ D\ mit$ $\lvert x - x_0 \rvert < \delta\ gilt$ | $\lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ ist ein Element der Menge $D$, die eine Teilmenge der reellen Zahlen ist | Eine Funktion $f$ von einer Teilmenge $D$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ heißt für ein $x_0$ aus dem Defintiionsbereich stetig, wenn | Für jede positive (reelle) Zahl, genannt $\varepsilon$ (also $\varepsilon > 0$) | Eine positive (reelle) Zahl $\delta$ existiert, die etwas bestimmten erfüllen soll (Sodass) | Für alle Elemente des Definitionsbereiches $D$ gelten, die $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ erfüllen, also einen Abstand kleiner $\delta$ von $x_0$ haben, die (noch folgende) Aussage gilt: | Der Abstand des Funktionswertes von $x$ ($f(x)$) zum Funktionswert von $x_0$ ($f(x_0)$)ist kleiner als $\varepsilon$ |

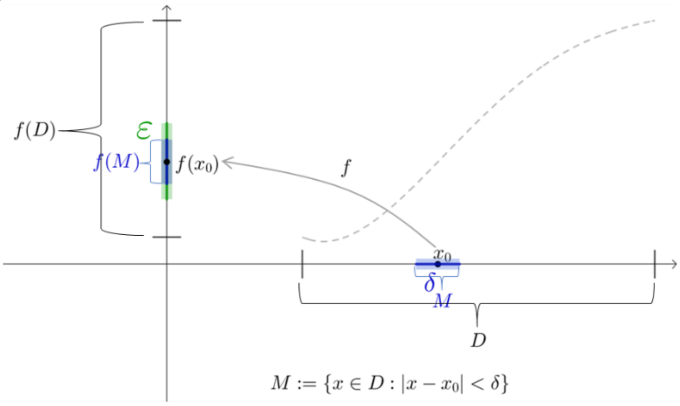
*c) Graphische Deutung der Definition*

| Zergliederung der Definition | Beschreibung | Bild |
|---|---|---|
| Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. | Angabe des Definitionsbereiches als Teilmenge der reellen Zahlen. Sei $x_0$ ein Element der Definitionsmenge. | |
| Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0$, wenn | Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0$, wenn |  |
| es zu jedem $\varepsilon > 0$ | es zu jeder beliebigen Umgebung um $f(x_0)$ (beschrieben durch $\varepsilon$) |  |
| ein $\delta > 0$ gibt, sodass | eine Umgebung um $x_0$ gibt (beschrieben durch $\delta$), sodass |  |
| für alle $x \in D$ mit $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ gilt | für alle $x$ in der $\delta$-Umgebung um $x_0$ |  |
| $\lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$ | alle zugehörigen Funktionswerte $f(x)$ in der $\varepsilon$-Umgebung um $f(x_0)$ liegen. |  |

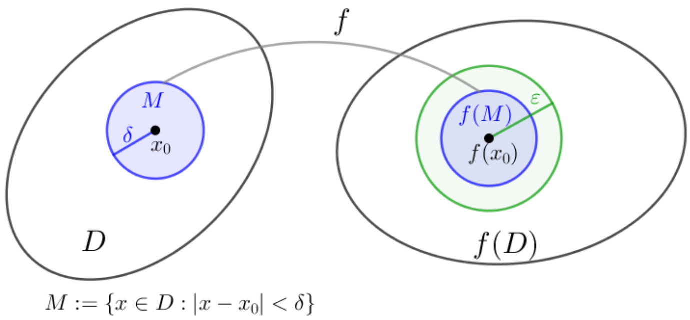
*d) Sprachliche Variation der Definition*

Man betrachtet ein Element $x_0$ aus der Definitionsmenge $D$, welche eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Eine Funktion $f$ mit Definitionsbereich $D$, die Elemente aus dem Definitionsbereich nach $\mathbb{R}$ abbildet, nennt man stetig im Element $x_0$, wenn zu einer beliebigen positiven, reellen Zahl größer als 0 (genannt $\varepsilon$) eine positive reelle Zahl größer Null (genannt $\delta$) existiert, sodass für alle Elemente, deren Abstand zu $x_0$ maximal $\delta$ beträgt, die Funktionswerte ($f(x)$) einen maximalen Abstand von $\varepsilon$ zu $f(x_0)$ haben.

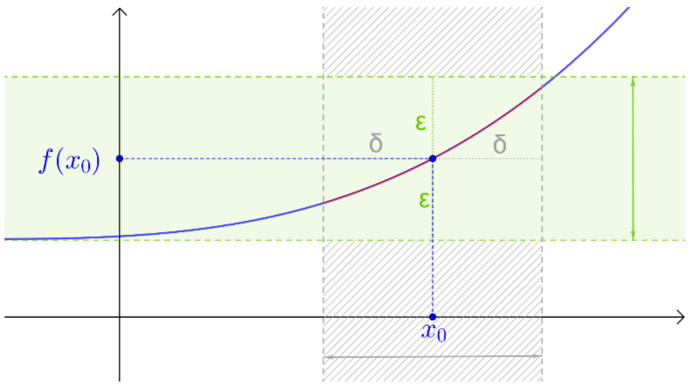
*e) Visualisierung*




*Visualisierung auf den Koordinatenachsen zweidimensional von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*




*„Verallgemeinerte" Visualisierung.*




*Visualisierung in Koordinatensystem zweidimensional von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

## 4) Beispiele und Gegenbeispiele

$f_1$ ist stetig auf dem gesamten Definitionsbereich ($\mathbb{R}$).

$f_2$ ist stetig, auch wenn sie anschaulich gesprochen einen „Sprung" macht. Dieser fällt aber genau in die Lücke des Definitionsbereiches, Stetigkeit wird aber nur für Elemente des Definitionsbereiches sinnvoll diskutiert. Für $x_0 = 3$ oder $x_0 = 6$ findet man ebenfalls zu jedem $\varepsilon$ ein $\delta$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $|x - x_0| < \delta$, weil eben nur die Elemente des Definitionsbereiches angesehen werden.

$f_3$ ist ebenfalls stetig, da 0 nicht im Definitionsbereich liegt und das die einzig kritische Stelle wäre.

$f_4$ ist nicht stetig in $x_0 = 0$, sonst ist sie stetig. Es handelt sich hierbei wieder um eine oszillierende Funktion, welche immer schneller hin und her schwingt, wenn man sich $x_0 = 0$ von der

„positiven Seite“ nähert. Trotzdem wird bei jeder Schwingung die 1 angenommen, sodass für $\varepsilon \leq 1$ kein $\delta$ gefunden werden kann.

$f_5$ ist nicht stetig, da in jeder noch zu kleinen $\delta$-Umgebung um eine rationale Zahl wieder eine irrationale Zahl liegt und umgekehrt ebenfalls.

## 5) Fallstricke und Missverständnisse

a) *Auf den Definitionsbereich kommt es an*:

- $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, die kritische Stelle $x_0 = 0$ wurde gerade aus dem Definitionsbereich herausgenommen.
- Das Konzept der Stetigkeit ist nicht sinnvoll, wenn man $f(x_0)$ nicht bestimmen kann. Denn dann ist überhaupt nicht klar, welchem Wert sich die Funktionswerte annähern sollen bzw. zu welchem Wert sie sich nicht weiter als $\varepsilon$ unterscheiden sollen.

*b) Durchzeichnen ohne abzusetzen*

Einen Graphen durchzeichnen können, ohne den Stift abzusetzen, stellt keine mathematische Definition dar und lässt Interpretationsspielraum: Soll davon ausgegangen werden, dass die Zeichnung durch den Stift selbst eine Dicke hat? Dann müsste für sehr kleine „Sprünge“ nicht der Stift abgesetzt werden. Angenommen, man geht von einem „theoretischen“ Stift aus, muss also keine Dicke der Linie berücksichtigen. Dann bleibt immer noch die Frage, ob sie oszillierenden Sinusfunktionen stetig sind. Es lässt sich dann schwer argumentieren, warum die eine „durchzeichenbar“ ist und die andere nicht. Ein weiteres Argument liefert $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Die Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich stetig, auch wenn sie nicht „durchzeichenbar“ ist „ohne den Stift abzusetzen“. Die Durchzeichenbarkeit liefert also keine gleichwertige Beschreibung zur Definition von Stetigkeit, aber sie ist eine hilfreiche Vorstellung, die in vielen Fällen auch zu einer richtigen Vermutung bezüglich Stetigkeit & Unstetigkeit führt.

*c) Bild des Funktionsgraphen*

Graphische Darstellungen von Funktionen bspw. durch Computerprogramme können für erste Einschätzung helfen, allerdings können sie auch fehlleiten wie im Beispiel gezeigt. Daher sollte immer noch einmal der Funktionsterm betrachtet werden und die „eigene Vorstellungskraft“ bemüht werden. Eine Veranschaulichung alleine ist auch noch kein Beweis, hilft aber vielleicht, eine Beweisidee zu entwickeln. Darüber hinaus gibt es Funktionen, die nicht mehr in dieser Form graphisch darstellbar sind.
Häufig führt eine unterschiedliche Achsenskalierung oder ein veränderter Zoom schon zu einem anderem Blick auf die Funktion, aber auch die Graphikprogramme stoßen an ihre Grenzen – beispielsweise beim Versuch, immer weiter in (0,0) hineinzuzoomen bei $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oder bei der Frage, wie die Dirichlet-Funktion angezeigt werden soll. Die Funktion bildet alle irrationalen zahlen auf 1 ab und alle rationalen auf 0. Das lässt sich aber eigentlich nur durch zwei parallele Geraden $f_1(x) = 0$ und $f_2(x)$=1 oder durch Folgen mit $x_n = 1$ und $y_n = 0$ „visualisieren“. Keines von beiden trifft aber das tatsächliche „Aussehen“. Hier ist die „eigene Vorstellungskraft“ wahrscheinlich hilfreicher.

*d) Die Reihenfolge ist entscheidend*

Natürlich wissen Sie aus der Logik, dass es einen Unterschied macht bzw. machen kann, in welcher Reihenfolge mathematische Symbole aneinandergereiht werden. Die in der Definition genannten Ausdrücke unterscheiden sich wie folgt:

„für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$…“ (**die Stetigkeitsdefinition**) bedeutet: Für jedes beliebige $\varepsilon > 0$, welches eine Umgebung um $f(x_0)$ festlegt, existiert ein $\delta > 0$, welches eine Umgebung um $x_0$ festlegt, sodass für alle $x \in D$ in der $\delta$-Umgebung gilt, dass alle $f(x)$ in der $\varepsilon$-Umgebung liegen. Um Stetigkeit zu testen, wählt man also zuerst ein $\varepsilon$ und sucht dann ein dazu passendes $\delta$, sodass die Bedingung erfüllt ist und schaut dann, ob diese Suche nach einem passenden $\delta$ für alle $\varepsilon$ erfolgreich ist.

„für jedes $\delta > 0$ existiert ein $\varepsilon > 0$ …“ hingegen bedeutet: Für jedes $\delta > 0$, welches eine Umgebung um $x_0$ festlegt, gibt es ein $\varepsilon > 0$, welches eine Umgebung von $f(x_0)$ festlegt, sodass für alle $x \in D$ in der $\delta$-Umgebung gilt, dass alle $f(x)$ in der $\varepsilon$-Umgebung liegen. Um das zu prüfen, würde man also zuerst ein $\delta$ festlegen und dann ein dazu passendes $\varepsilon$ suchen, sodass die Bedingung erfüllt ist und dann schauen, ob diese Suche nach einem passenden $\varepsilon$ für alle $\delta$ erfolgreich ist.

Für die konkrete Funktion bedeutet das: Der erste Ausdruck (Stetigkeitsdefinition) ist erfüllt für alle $x_0 \neq 0$, für $x_0 = 0$ hingegen nicht. Der zweite Ausdruck ist hingegen immer erfüllt, also für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, denn auch für $x_0 = 0$ findet man für jedes $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$, sodass die Bedingung erfüllt ist, nämlich $\varepsilon = 3$.

## 6) Vorstellungen & Metaphern

Wie bereits analysiert, ist die Vorstellung von Stetigkeit als „Durchzeichnen ohne abzusetzen“ hilfreich, man sollte aber gleichzeitig ihre Grenzen kennen.

i. Diese Beschreibung beschreibt Stetigkeit sehr passend, bleibt aber auch sehr dicht bei der Formulierung von Stetigkeit. Auch hier müsste man sich bewusst sein, dass die Abweichung von $f(x)$ innerhalb einer ganzen Umgebung um $x_0$ eingehalten werden muss.

ii. Diese Beschreibung ist sehr eingängig, leider lässt sie aber auch viele Fragen offen. Was genau soll „klein“ dabei bedeuten? Das müsste genauer geklärt werden, was über „kleine Ursachen – keine große Wirkung“ vielleicht besser gelingen könnte.

iii. Diese Metapher stimmt auch, bezieht sich aber stärker auf eine alternative Definition von Stetigkeit, die Sie in Aufgabe 7 näher kennenlernen. Aber auch bei dieser Vorstellung bleiben Fragen offen, da unklar ist, was mit „kommt näher“ gemeint ist.

iv. Die Vorstellung beschreibt die Stetigkeit relativ passend, es muss nur bedacht werden, dass mit „um $x_0$ herum“ gemeint ist, dass nicht zu jeder Genauigkeitsforderung nur ein $x$ gefunden werden muss, das diese erfüllt, sondern dass eine Umgebung um $x_0$ gefunden werden muss, für die das gilt.

v. Diese Beschreibung ist etwas ungenauer als die vorherige, geht aber in eine ähnliche Richtung, auch wenn hier zusätzlich noch geklärt werden müsste, was „kontrollierbar“ bedeuten soll.

# Stetigkeit

# Teil 2

### 7) Alternative Stetigkeitsdefinitionen und Vergleich mit Konvergenz

*a) Schreiben Sie die Definition aus der Vorlesung komplett aus, indem Sie die Definition von $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ integrieren. (Diese neu gewonnene, ausführliche Definition nennen wir im Folgenden „ausführliche Vorlesungsdefinition")*

*Ausführliche Definition:*

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f: D \to \mathbb{R}, x_0 \in D$. $f$ heißt stetig in $x_0$, falls gilt: Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Oder in Worten: Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D$, die gegen $x_0$ konvergiert, konvergiert die Folge der Funktionswerte gegen $f(x_0)$.

Anmerkung: Auf den Zusatz „$x_0 \in \mathbb{R}$, sodass mindestens eine Folge in D existiert, die gegen $x_0$ konvergiert" in der Definition von Funktionenkonvergenz können wir hier verzichten. Der Grund dafür ist, dass $x_0 \in D$ liegt. Damit gibt es immer eine Folge, nämlich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die in $D$ liegt und gegen $x_0$ konvergiert.

*b)*

Beobachtungen:

$f_1$: Bei dieser Funktion kommt es darauf an, ob man sich von „rechts" oder von „links" nähert. Von rechts bleibt der Funktionswert immer 1, von links wird der Funktionswert immer -1. Man kann sich aber auch von beiden Seiten gleichzeitig mit einer Folge nähern, dann würde der Funktionswerte immer hin und her springen. Nähert man sich $x_0 = 0$ also irgendwie, so nähert man sich nicht automatisch auch $f(x_0)$, was ja gleich 1 ist.

$f_2$: Bei dieser Funktion ist es so, dass man sich $f(x_0)$ nähert, ganz egal, wie man sich $x_0 = 0$ nähert.

$f_3$: Bewegt man sich auf $x_0$ zu, so schwankt die Funktion immer schneller zwischen -1 und 1 hin und her. Nähert man sich $x_0 = 0$ von einer Seite, so nähern und entfernen sich die Funktionswerte immer wieder von $f(x_0) = 0$, man nähert sich $f(x_0)$ also nicht grundsätzlich immer mehr an, da immer wieder Werte von 1 und -1 angenommen werden.

$f_4$: Diese Funktion oszilliert auch immer schneller. Im Gegensatz zu $f_3$ wird die Amplitude aber immer kleiner, da die Multiplikation mit $x$ die Amplitude verkleinert, wenn man sich der 0 „nähert"[3]. Egal, wie man sich $x_0 = 0$ also nähert, die Funktionswerte nähern sich auch $f(x_0) = 0$. An dieser Stelle kann man auch sehr schön sehen, dass „nähern" nicht heißt, dass die Funktion monoton verlaufen muss: Liegt $x_1$ näher an $x_0$ als $x_2$, muss das nicht heißten, dass $f(x_1)$ näher an $f(x_0)$ liegt als $f(x_2)$. (denn auch bei einer konvergenten Folge muss das nächste Folgenglied ja nicht näher am Grenzwert liegen als das vorherige) Es muss sich nur insgesamt um einen Näherungsprozess handeln.

[3] Dabei ist anzumerken, dass die „Amplitude" von $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht an der gleichen Stelle liegt wie die von $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Gemeint ist an dieser Stelle die Amplitude von $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Zusammenhang mit der ausführlichen Vorlesungsdefinition:

Die Fragestellung ist quasi eine Interpretation der Definition. Dabei entspricht „sich $x_0$ nähern" der Betrachtung einer Folge, die gegen $x_0$ konvergiert in der Definition. „Nähern sich die Funktionswerte dann auch $f(x_0)$" entspricht der Betrachtung der Bildfolge und der Frage nach Konvergenz der Bildfolge. Die Fragestellung interpretiert die Definition anschaulich und gibt eine Möglichkeit, die Definition anschaulich auf konkrete Funktionen bzw. Funktionsgraphen anzuwenden.

*c)*

Die Lösung von (A) ist im Prinzip der fiktive Dialog in (B). Hier noch einmal eine verbale Beschreibung am Stück:

Zur ausführlichen Vorlesungsdefinition passt die Vorstellung „Egal wie man sich $x_0$ nähert bzw. sich auf $x_0$ zubewegt, man nähert sich auch immer $f(x_0)$ bzw. bewegt sich auf $f(x_0)$ zu." Mit dem „egal wie man sich $x_0$ nähert" beschreibt man anschaulich „für jede Folge, die gegen $x_0$ konvergiert". Mit „nähert man sich dann auch immer $f(x_0)$" beschreibt man anschaulich, dass dann auch die Folge der Funktionswerte gegen $f(x_0)$ konvergiert. Mit „nähern" meint man damit immer „man kann beliebig nahe herankommen".

Die Vorstellung passt also ganz gut zur ausführlichen Vorlesungsdefinition. Doch wie passt sie zur $\varepsilon - \delta$-Definition von Stetigkeit?

Dazu wird „nähern" nicht Hilfe von Folgen präzisiert. Mit „sich $f(x_0)$ nähern" meint man „die Funktionswerte kommen beliebig nahe heran an $f(x_0)$", das heißt, für jedes $\varepsilon > 0$ liegen die Funktionswerte irgendwann näher an $f(x_0)$ als $\varepsilon$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Doch was soll nun irgendwann heißen? Bei Folgen würde man sagen, ab einem bestimmten Folgenglied. Wir wollen aber ohne Folgen vorgehen. Also in einer bestimmten Umgebung um $x_0$, denn so etwas ähnliches Stellen wir uns eigentlich vor, wenn wir sagen „ab einem bestimmten Folgenglied bei jeder Folge". Es soll also eine $\delta$-Umgebung um $x_0$ geben, sodass die Funktionswerte der Werte in dieser $\delta$-Umgebung in der $\varepsilon$-Umgebung um $f(x_0)$ liegen: $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Da wir uns $f(x_0)$ ja beliebig nähern wollen, soll das für alle $\varepsilon > 0$ gehen, also:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Das ist aber genau die $\varepsilon - \delta$-Definition von Stetigkeit.

Kurzfassung:

„sich $f(x_0)$ nähern" heißt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt irgendwann: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

„irgendwann" heißt: Es gibt ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

*d)*

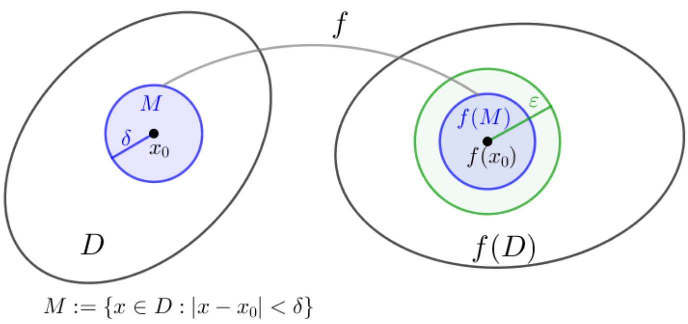
Wegen der $\varepsilon - \delta$-Definition gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Nähert man sich $x_0$, das heißt nimmt man eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen $x_0$ konvergiert, so gibt es für eben dieses $\delta > 0$ wegen der Konvergenz gegen $x_0$ immer ein Folgenglied, ab dem für alle restlichen Folgenglieder man näher als $\delta$ an $x_0$ ist, es gilt also: Es gibt ein $N_\delta$

sodass $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq N_\delta$. Für alle Folgenglieder der Funktionswerte gilt wegen des $\varepsilon - \delta$-Kriteriums dann: $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\delta$. Alle Funktionswerte der Folgenglieder liegen ab einem bestimmten Folgenglied in der $\varepsilon$-Umgebung um $f(x_0)$.

Da es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ gibt und zu jedem $\delta > 0$ ein $N_\delta$, sodass $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\delta$, folgt insgesamt: Zu jeder noch so kleinen Umgebung um $f(x_0)$ gibt es ein Folgenglied, ab dem alle weiteren Folgenglieder innerhalb der Umgebung liegen, $f(x_n)$ konvergiert also gegen $f(x_0)$.

Gilt also die $\varepsilon - \delta$-Definition und man nähert sich $x_0$, so nähert man sich mit den Funktionswerten auch $f(x_0)$.

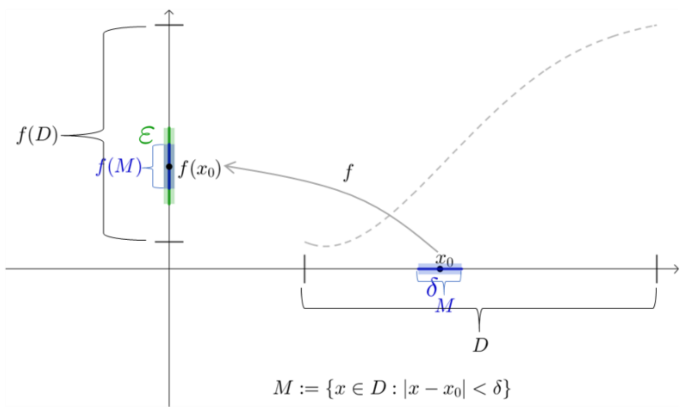
*e)*




*Visualisierung Möglichkeit 1.*

Die Äquivalenz zur $\varepsilon - \delta$-Definition kann man nun über die Äquivalenzen der beiden Konvergenzdefinitionen nachweisen. Man kann sich den Zusammenhang aber auch **mit Hilfe der Anschauung** verdeutlichen:

„$\varepsilon - \delta$-Definition $\Longrightarrow$ ausführliche Vorlesungsdefinition“
Wegen der $\varepsilon - \delta$-Stetigkeit der Funktion in $x_0$ findet man zu jeder $\varepsilon$-Umgebung von $f(x_0)$ eine $\delta$-Umgebung um $x_0$, sodass die $\delta$-Umgebung in die $\varepsilon$-Umgebung abgebildet wird: für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D$, die gegen $x_0$ konvergiert. Nun betrachtet man die Folge der Funktionswerte: $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Es ist zu zeigen, dass diese Folge gegen $f(x_0)$ konvergiert. Man sucht also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
Sei also $\varepsilon > 0$. Wegen der $\varepsilon - \delta$ –Stetigkeit gibt es dazu ein $\delta > 0$, sodass die $\delta$-Umgebung um $x_0$ in die $\varepsilon$-Umgebung um $f(x_0)$ abgebildet wird. Insbesondere werden alle Glieder der Folge $x_n$, die in der $\delta$-Umgebung von $x_0$ liegen, in die $\varepsilon$-Umgebung von $f(x_0)$ abgebildet (denn $f(M)$ ist Teil der $\varepsilon$-Umgebung). Weil $x_n$ gegen $x_0$ konvergiert, liegen in jeder $\delta$-Umgebung von $x_0$ alle Folgenglieder ab einem $n_\delta \in N$. Das bedeutet also: Ab einem $n_\delta \in \mathbb{N}$ liegen alle $f(x_n)$ mit $n \geq n_\delta$ innerhalb der $\varepsilon$-Umgebung von $f(x_0)$. Und das genau bedeutet, dass $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.




„ausführliche Vorlesungsdefinition $\Longrightarrow$ $\varepsilon - \delta$-Definition“
Die umgekehrte Richtung überlegt man sich mittels eines Widerspruchsbeweises: Wir gehen also davon aus, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D$, die gegen $x_0$ konvergiert, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert und die Funktion nicht $\varepsilon - \delta$-stetig ist.
Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ existiert, sodass $x$ zwar in der $\delta$-Umgebung von $x_0$ liegt ($|x - x_0| < \delta$), aber $f(x)$ außerhalb der $\varepsilon$-Umgebung von $f(x_0)$ liegt, also größeren einen Abstand zu $f(x_0)$ als $\varepsilon$ hat ($|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$).
Da es für alle $\delta$ ein solches $x_\delta$ gibt, kann man also beliebig nahe an $x_0$ „herangehen“, man findet immer wieder $x_\delta$, für die $f(x_\delta)$ einen größeren Abstand zu $f(x_0)$ hat als $\varepsilon$. Mit anderen Worten: Man kann sich dadurch eine Folge konstruieren, die gegen $x_0$ konvergiert, die Folge der Funktionswerte konvergiert aber nicht gegen $f(x_0)$: Man lässt dazu $\delta$ einfach „immer kleiner werden“ und „gegen 0 laufen“. Sei also $\delta_n := \frac{1}{n}$.

Dann existiert für jedes $\delta_n$ ein $x_n$ mit $0 \leq |x_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Wegen $\delta_n \to 0$ und dem Sandwichkriterium gilt auch $x_n \to x_0$, gleichzeitig aber sind die Bilder der Folge immer mindestens $\varepsilon$ von $f(x_0)$ entfernt, konvergieren also nicht gegen $f(x_0)$, was aber der Voraussetzung widerspricht. Damit muss $f$ $\varepsilon - \delta$-stetig in $x_0$ sein.

*Kommentar zum Versuch eines direkten Beweises der Richtung: „$\varepsilon - \delta$-Definition $\Longrightarrow$ ausführliche Vorlesungsdefinition"*

Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht ist nun ein $\delta > 0$, dass $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$. Man weiß nun, dass für jede Folge $x_n \to a$ gilt: $f(x_n) \to f(a)$. Ab einem gewissen Folgenglied $N$ gilt also für alle Folgenglieder: $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon, n \geq N$.

Nun könnte man folgendes überlegen:

Zunächst scheint es verlockend, direkt $\delta := |x_N - a|$ zu setzen, schließlich weiß man ja für alle weiteren Folgenglieder, dass sie in der $\varepsilon$-Umgebung liegen. Allerdings sollen ja alle Funktionswerte von $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ in der $\varepsilon$-Umgebung liegen und es ist schon unklar, ob überhaupt alle Folgenglieder darin liegen, da $|x_N - a|$ durchaus kleiner sein kann als $|x_{N+1} - a|$. (Denn $N$ wurde ja durch die Bildfolge bestimmt, nicht durch die Folge.)

Man könnte nun überlegen, dass es ein Maximum der Abstände der Folgenglieder geben muss, denn $x_n$ konvergiert ja gegen $x_0$, ab einem gewissen Folgenglied $x_M$ liegen also alle Folgenglieder näher an $x_0$ als $x_N$ und zwischen $x_M$ und $x_N$ liegen nur endlich viele Folgenglieder. Man kann also einen maximalen Abstand bei jeder Folge bestimmen: Setze $\delta_{x_n} := \max\{|x_n - a|, n \geq N\}$. Allerdings müssen ja alle Werte $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ in der $\varepsilon$-Umgebung liegen und es kann durchaus sein, dass das auch für Folgenglieder $x_n$ mit $n < N$ gilt. Über deren Funktionswerte weiß man aber nichts. Dieses Argument kann man auch ausweiten auf Werte $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$, die keinem Folgenglied entsprechen. Hier müsste man überlegen, ob es solche Werte geben kann (kann es). Dass man hier nicht weiterkommt hat auch damit zu tun, dass man bisher „für jede Folge" noch nicht benutzt hat, aber auch das scheint keinen Lösungsansatz zu bringen.

*Wie ist man jeweils auf die zentrale Idee gekommen?*

In diesem Fall mit Hilfe einer Visualisierung. Diese kann man nutzen, um selbst zu sehen, was gegeben ist und was zu zeigen ist. In der Visualisierung werden dann die Zusammenhänge zwischen $\varepsilon$ und der Folge der Funktionswerte sowie $\delta$ und der Folge deutlich.

*f)*

Fassen Sie die Erkenntnisse dieses Teils zusammen, indem Sie alle äquivalenten Definitionen für Stetigkeit noch einmal ausformulieren:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

($\varepsilon - \delta$-Definition)
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

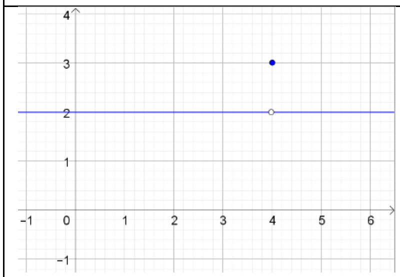
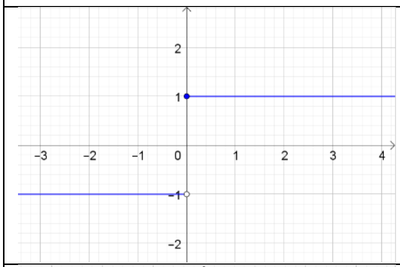
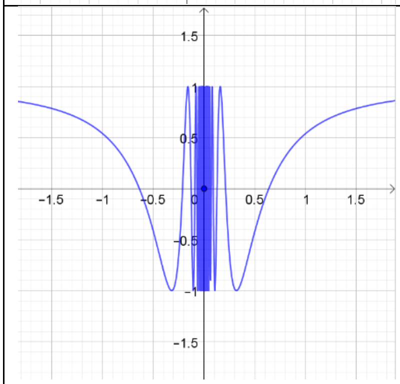
(Definition aus der Vorlesung – Definition über Konvergenz)
Die Funktion konvergiert gegen $f(x_0)$ für $x$ gegen $x_0$ : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(ausführliche Vorlesungsdefinition – Folgenstetigkeit)
Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

*g) Es gibt natürlich verschiedene Möglichkeiten:*

- „Stetige Funktionen sind genau die, die Grenzprozesse beim Abbilden erhalten.“
- „Stetige Funktionen sind genau die, bei denen es egal ist, ob man zuerst abbildet und dann den Grenzwertprozess betrachtet oder umgekehrt.“
- „Bei stetigen Funktionen darf der Limes in die Funktion gezogen werden.“
- „Bei stetigen Funktionen gilt: Nähert man $x$ an $x_0$an, so nähert sich $f(x)$ auch $f(x_0)$.“

## 8) Arten von Unstetigkeit

| Graph | Vorschrift | Inwiefern ist Definition von Stetigkeit über Konvergenz verletzt? |
|---|---|---|
|  | $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \begin{cases} 3 & x = 4 \\ 2 & sonst \end{cases}$ | Der links- und rechtsseitige Grenzwert ($\lim_{x \uparrow 4} f_1(x) = 2$ und $\lim_{x \downarrow 4} f_1(x) = 2$) existiert, sie stimmen auch überein. Trotzdem existiert der Grenzwert nicht, denn für die Folge $x_n = 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim_{n \to \infty} f_1(x_n) = f(4) = 3$. Die Funktionswerte der Folge konvergieren also gegen 3, während andere Folgen von Funktionswerten gegen 2 konvergieren (siehe rechts- und linksseitiger Grenzwert). |
|  | $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ | Grenzwert ($\lim_{x \to 0} f_2(x)$) existiert nicht, bzw. präziser: Es existiert zwar ein rechts- und linksseitiger Grenzwert (1 und -1), diese stimmen aber nicht überein. |
|  | $f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ | Der Grenzwert $\lim_{x \to 0} f_3(x)$ existiert nicht, es existieren auch nicht links- und rechtsseitiger Grenzwert. Begründung: Es gibt eine Folge $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ mit $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi n} = 0$, deren Funktionswerte immer gleich 1 sind ($\cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}\right) = \cos(2\pi n) = 1$. Die Folge der Funktionswerte konvergiert daher gegen 1. Es gilt aber $f(0) = 0$. |

## 9) Stetigkeit und Unstetigkeit nachweisen

| | **Stetigkeit nachweisen** | **Unstetigkeit nachweisen** |
|---|---|---|
| **$\varepsilon - \delta$-Definition** | Man muss zeigen, dass es zu jedem beliebigen $\varepsilon$ ein $\delta$ gibt, sodass für alle $x$ im Definitionsbereich, die $\|x - x_0\| < \delta$ erfüllen, auch $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ gilt.<br><br>Konkret bedeutet das meist: Man lässt $\varepsilon > 0$ beliebig und sucht in Abhängigkeit von $\varepsilon$ und $x_0$ ein $\delta > 0$, dass die genannte Eigenschaft erfüllt. | Man muss zeigen, dass es ein $\varepsilon$ gibt, sodass - egal welches $\delta$ man nimmt - es stets ein $x \in D$ gibt mit $\|x - x_0\| < \delta$, aber $\|f(x) - f(x_0)\| > \varepsilon$.<br><br>Konkret bedeutet das: Man sucht und definiert ein $\varepsilon > 0$ und lässt $\delta > 0$ beliebig und sucht dann $x \in D$ (in Abhängigkeit von $\delta$), sodass $x$ in der $\delta$-Umgebung um $x_0$ liegt, aber nicht in der $\varepsilon$-Umgebung um $f(x_0)$. |
| **Definition über Konvergenz** | Man muss zeigen, dass der Grenzwert der Funktion existiert (und gleich dem Funktionswert ist).<br><br>*Man kann also die Grenzwertsätze nutzen, um Stetigkeit nachzuweisen.* | Man muss zeigen, dass der Grenzwert der Funktion nicht existiert oder nicht gleich dem Funktionswert ist. |
| **Definition über Folgen** | Man muss zeigen, dass für jede Folge$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $x_0$ konvergiert, die Funktionswerte der Folge gegen $f(x_0)$ konvergieren.<br><br>*Man kann also die Grenzwertsätze für Folgen nutzen, um Stetigkeit nachzuweisen.* | Man findet eine Folge, Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $x_0$ konvergiert, deren Funktionswerte aber nicht konvergieren oder nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren.<br><br>*Es genügt also, <u>eine einzige</u> gegen $x_0$ konvergierende Folge, deren Bilder nicht oder nicht gegen den Funktionswert des Grenzwertes konvergieren, um Unstetigkeit nachzuweisen. Man muss also „nur“ ein Gegenbeispiel erzeugen.* |

**Stetigkeit mit Hilfe von Verknüpfungen**

a) Beispielhaft ist hier der Beweis für die Addition stetiger Funktionen angeführt, einmal über Funktionen, einmal über Folgen:

Zu zeigen ist: Sei $D \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$. Sind $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen in $x_0 \in D$, so sind $f + g$ stetig in $x_0$ (wobei $f + g$ bedeutet: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$).

- Funktionen: Man muss nachprüfen, ob $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = (f + g)(x_0)$ gilt.
  Da $f$ und $g$ stetig auf ganz $D$ sind, gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ sowie $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.
  Da beide Funktionen dadurch insbesondere konvergieren, konvergiert auch die Summe der Funktionen und zwar gegen die Summe der Grenzwerte (Grenzwertsätze für Funktionen):
  $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$
  Damit ist $(f + g)$ stetig auf ganz $D$.
- Folgen: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D$ eine Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Zu zeigen ist nun: $\mathit{lim}_{n \to \infty} (f + g)(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) + g(x_n) = (f + g)(x_0)$. Da $f$ und $g$ stetig auf ganz $D$, gilt für jede Folge, die gegen $x_0$ konvergiert, dass die Bilder der Folge gegen die Bilder von $x_0$ konvergieren, also: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ und $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = g(x_0)$. Da $f(x_n)$ und $g(x_n)$ dadurch insbesondere konvergieren, konvergiert auch die Summe der Folgen und zwar gegen die Summe der Grenzwerte (Grenzwertsätze für Folgen):
  $\lim\limits_{\mathrm{n} \to \infty} (f + g)(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) + g(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) + \lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$

b) Zu zeigen: $f: \mathbb{R} \backslash \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{4 \cdot |x|^3 + x}{x}$ ist stetig auf dem Definitionsbereich.
   Sei $x_0 \in D$, das heißt insbesondere $x_0 \neq 0$.
   Setze: $g(x) = 4 \cdot |x|^3 + x$ und $h(x) = x$.
   Wegen $x_0 \neq 0$ ist auch $h(x_0) \neq 0$ und damit wäre $\frac{g}{h}$ stetig in $x_0$ (wegen Division zweier stetiger Funktionen), wenn $g$ stetig ist $x_0$.
   Es bleibt also zu zeigen, dass $g$ stetig in $x_0$:
   - $|x|$ ist stetig in $x_0$, da $x$ stetig in $x_0$ und die Betragsbildung stetiger Funktionen stetig ist,
   - $|x|^3 = |x| \cdot |x| \cdot |x|$ ist stetig in $x_0$, da $|x|$ stetig in $x_0$ und die Multiplikation stetiger Funktionen stetig ist,
   - $4 \cdot |x|^3$ ist stetig in $x_0$, da $|x|^3$ stetig in $x_0$ und die Vervielfachung stetiger Funktionen stetig ist,
   - $4 \cdot |x|^3 + x$ ist stetig in $x_0$, da $4 \cdot |x|^3$ und $x$ stetig in $x_0$ sind und die Addition stetiger Funktionen stetig ist.