Vorwort

Vielen herzlichen Dank dafür, dass Sie sich für die Teilnahme an der Studie entschieden haben!

Vorab nun noch ein paar kurze Hinweise zum Material:

Am linken Rand des Materials befindet sich eine Spalte, in der Sie

- Links zu (meist interaktiven) Visualisierungen finden sowie hin und wieder Links zu kurzen Videos, die – falls nötig – den Umgang damit erklären,
- Allgemeine Leitfragen, die Sie sich auch für andere Definitionen (Sätze) stellen können, um den Begriff (Satz) besser zu verstehen.

Außerdem können Sie natürlich frei im Material entscheiden, welche Aufgabe Sie machen möchten und welche Sie für sich für nicht geeignet halten.

Zum Material gibt es Lösungshinweise und es wird empfohlen, immer mal wieder einen Blick hineinzuwerfen und nicht zuerst das gesamte Material zu bearbeiten.

Stetigkeit

(für reellwertige Funktionen einer Variablen)

Teil 1

Kern vieler Betrachtungen ist die Untersuchung des Verhaltens von Funktionen und die Bildung von Begriffen wie Monotonie, Injektivität, Surjektivität oder Konvergenz zur Beschreibung des Verhaltens von Funktionen. Im Folgenden soll ein weiteres Phänomen bei Funktionen untersucht werden und anschließend mathematisch präzisiert werden.

1) Aufgabe: Einstieg

Betrachten Sie die folgenden Funktionen f_1 bis f_4.

Wie verhalten sich die Funktionen um die Stelle $x_0 = 0$ herum?

- Wenn Sie x_0 ein bisschen verändern, ändert sich $f(x_0)$ „währenddessen“ dann auch „nur ein bisschen“?
- Wenn Sie sich x_0 nähern, was können Sie dann für die Funktionswerte beobachten? Nähern sich diese auch $f(x_0)$?

https://bit.ly/33xej5f

<table>
<tr>
<td>

Funktionsgraph

Funktionsvorschrift

$f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

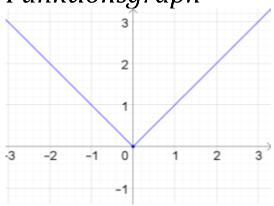
$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Verbale Beschreibung

Werte, die echt kleiner als Null sind, werden auf -1 abgebildet, Werte, die Null oder größer sind, werden auf 1 abgebildet.

</td>
<td>

Funktionsgraph



Funktionsvorschrift

$f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

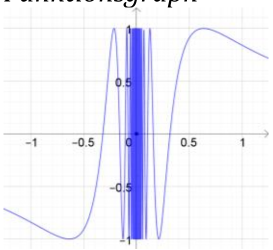
$$f_2(x) = |x|$$

Verbale Beschreibung

Werte, die echt kleiner als Null sind, werden auf $-x$ abgebildet, Werte, die Null oder größer sind, werden auf x abgebildet.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Funktionsgraph



Funktionsvorschrift

$f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

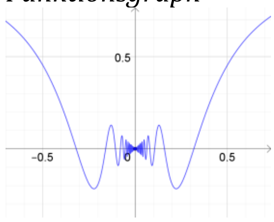
$$f_3(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Verbale Beschreibung

Die Funktion verläuft zyklisch (Sinus), allerdings bewirkt $1/x$, dass die Funktion immer „schneller“ oszilliert, wenn sich x auf 0 zubewegt ($1/x$ wird dann immer „schneller“ größer und damit wird die Periode immer kleiner). Die Funktion schwankt somit immer schneller zwischen -1 und 1 hin und her, wenn x gegen 0 geht.

</td>
<td>

Funktionsgraph



Funktionsvorschrift

$f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_4(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Verbale Beschreibung

Die Funktion verläuft zyklisch (Sinus), allerdings bewirkt $1/x$, dass die Funktion immer „schneller“ oszilliert, wenn sich x auf 0 zubewegt ($1/x$ wird dann immer „schneller“ größer und damit wird die Periode immer kleiner). Die Multiplikation mit x bewirkt zudem, dass die Amplitude (also der maximale Ausschlag der Oszillation) gedämpft wird, wenn x kleiner wird.

</td>
</tr>
</table>

Wie Sie gerade wahrscheinlich festgestellt haben, können sich Funktionen darin unterscheiden, *ob sich während einer kleinen Änderung von x_0 die Funktionswerte auch nur ein bisschen ändern.* Was soll aber „währenddessen“ oder „nur ein bisschen ändern“ bedeuten? Man könnte es auch so formulieren: Während einer kleinen Änderung von x_0, ändern sich die Funktionswerte nicht stark.

Doch was soll „nicht stark" heißen? Es könnte heißen, dass man die Änderung der Funktionswerte beliebig klein halten kann, indem man die Änderung von x_0 entsprechend klein wählt. So ist das „gleichbedeutend" mit der Frage, *ob man zu beliebig kleinen Änderungen im Funktionswert eine passende Änderung im Argument (x-Wert) finden kann, sodass es „währenddessen" keine größere Änderung im Funktionswert gibt.* Funktionen mit dieser Eigenschaft besitzen eine gewisse Kontinuität und dadurch eine gewisse „Berechenbarkeit". Davon gehen wir im Alltag intuitiv ganz häufig aus, wenn das Ergebnis ein wenig verändert sein soll (bspw. Kuchen weniger süß), dann muss die Eingabe ein wenig verändert werden (weniger Zucker). Dabei können wir das Ergebnis beliebig festsetzen und finden immer eine passende Eingabe. Das mathematische Konzept der Stetigkeit präzisiert diese Vorstellung und hilft, sprachliche Ungenauigkeiten wie „währenddessen" oder „ändert sich nur ein wenig" in den Griff zu bekommen.

Hinführung

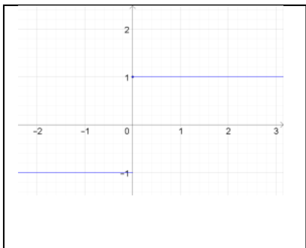
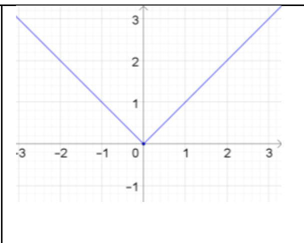
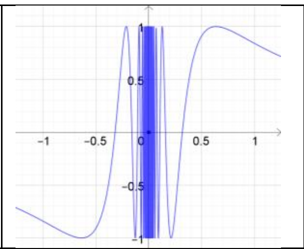
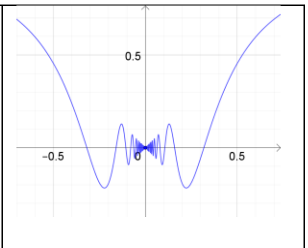
https://bit.ly/2YMxAke

Erklärung zur Geogebra-Datei *https://bit.ly/2KL4F6m*

2) Aufgabe: Hinführung $\varepsilon - \delta -$ Definition

In einem ersten Schritt soll grafisch betrachtet werden, was es für die Funktionen f_1 bis f_4 heißen könnte, dass…

…man für jede beliebige Änderung (ε) der Funktionswerte ($f(x_0) \pm \varepsilon$) eine Schranke (δ) für Änderungen im Argument vorgeben kann ($x_0 \pm \delta$), sodass die Funktionswerte für Werte innerhalb dieser Schranke („währenddessen") innerhalb der gewünschten Änderung ($f(x_0) \pm \varepsilon$) verbleiben.

			
$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$	$f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \lvert x \rvert$	$f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & sonst \\ 0 & x = 0 \end{cases}$	$f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_4(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & sonst \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

a) *Stellen Sie ε beliebig ein, indem Sie an der oberen Begrenzung ziehen. Versuchen Sie, ein passendes δ zu finden, sodass die zugehörigen Funktionswerte alle innerhalb im schraffierten Bereich (innerhalb von $f(x_0) \pm \varepsilon$) liegen. Versuchen Sie das für verschiedene ε-Werte.*

b) *Verschieben Sie x_0 und wiederholen Sie die Aufgabe 1). Notieren Sie Ihre Beobachtungen[1], beispielsweise in der folgenden Tabelle:*

	Findet man für das <u>eingestellte</u> $x_0 = 0$ zu jedem ε ein passendes δ?	Findet man für <u>andere</u> x_0 zu jedem ε ein passendes δ?
f_1		
f_2		
f_3		
f_4		

[1] Es geht an dieser Stelle um Ihre Vermutungen auf Basis der Anschauung, nicht um Nachweise.

Funktionen, bei denen man für ein x_0 für beliebige ε immer ein passendes δ angeben kann, sodass für alle Werte in der δ-Umgebung um x_0 die Funktionswerte in der ε-Umgebung um $f(x_0)$ liegen, heißen **stetig in x_0** (bspw. sind f_2 und f_4 stetig in $x_0 = 0$). Funktionen, bei denen das in x_0 nicht geht, heißen **unstetig in x_0** (bspw. sind f_1 und f_3 unstetig in $x_0 = 0$). Funktionen, bei denen das für alle Elemente aus dem Definitionsbereich funktioniert (f_2 und f_4) heißen **stetig auf D**. Nutzt man nun noch eine formale Darstellung für ε-Umgebung und δ-Umgebung durch die mathematische Darstellung des Abstandes durch den Betrag, so ergibt sich die formale Darstellung:

(Notieren Sie sorgfältig die Definition.)

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in x_0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Betrachten Sie die Struktur der Definition:

- Über welche Gegenstände wird eine Aussage getroffen?
- Welcher Begriff wird definiert?
- Welches sind die definierenden Eigenschaften?

3) Aufgabe: Formulierung und Struktur der Definition

Im Folgenden wird die Definition sehr genau auf verschiedenen Ebenen betrachtet.

a) Grobstruktur der Definition

- Über welche Gegenstände wird eine Aussage getroffen?
- Welcher Begriff wird definiert?
- Welches sind die definierenden Eigenschaften?

b) Die Definition im Detail

Zergliedern Sie die Definition:

- Was bedeuten die vorkommenden Symbole jeweils?
- In welcher Beziehung stehen die Symbole zueinander?

Zerlegen Sie die Definition in – aus Ihrer Sicht – sinnvolle Bestandteile und machen Sie sich bewusst, was die darin vorkommenden Symbole im Einzelnen bedeuten und beschreiben Sie deren Beziehung innerhalb der Bestandteile.

Beispiel für einen möglichen Bestandteil:

„Für alle x aus D mit $|x - x_0| < \delta$ gilt“

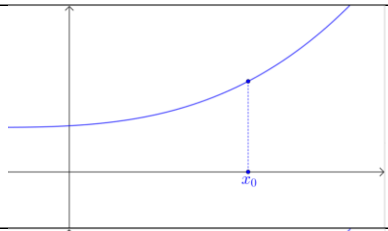
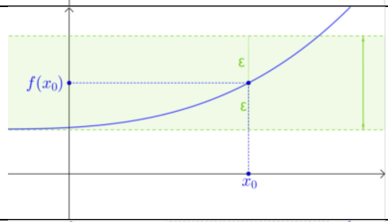
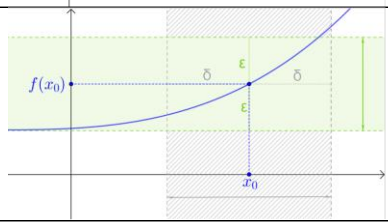
(Bedeutung der Symbole: D ist der Definitionsbereich, x steht für Elemente aus dem Definitionsbereich, x_0 für das Element, für das Stetigkeit betrachtet werden soll, δ ist die zuvor gewählte Zahl größer als 0, $|x - x_0|$ beschreibt den Abstand zwischen x und x_0)

Beziehung: Für alle Elemente des Definitionsbereiches D gelten, die $|x - x_0| < \delta$ erfüllen, also einen Abstand kleiner δ von x_0 haben, eine (noch folgende) Aussage

Analysieren Sie die Bedeutungen der Bestandteile der Definition sowie die Verbindung zu einem Funktionsgraphen.

c) *Graphische Deutung der Definition*

Welche graphische Bedeutung haben die einzelnen Teile der Definition? Erschließen Sie sich die Bedeutung, indem Sie die Definition mit für Sie geeigneten auch weniger formal-sprachlichen Mitteln (wie bspw. „Umgebung“ oder „Bereich“) beschreiben und das graphisch deuten:

Zergliederung der Definition	Beschreibung	Bild
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.		
Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in x_0, wenn		
es zu jedem $\varepsilon > 0$		
ein $\delta > 0$ gibt, sodass		
für alle $x \in D$ mit $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ gilt		
$\lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$		

Variieren Sie die Definition sprachlich (bspw. Operatoren ausschreiben).

d) *Sprachliche Variation der Definition*

Formulieren Sie die Definition in für Sie gut eingängiger Form (ggf. mit oder ohne Symbole, mit mehr- oder weniger formalsprachlichen Mitteln).

Visualisieren Sie die Definition.

e) *Visualisierung*

Erstellen Sie eine für Sie gut geeignete Visualisierung der Definition.[2] Eine Möglichkeit besteht zum Beispiel in einer „verallgemeinerten“ Visualisierung über eine Abbildung zwischen zwei Mengen oder aber für $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehr konkret im 2-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem.

[2] Entscheidend ist, dass alle wesentlichen Punkte der Definition in der Visualisierung enthalten sind.

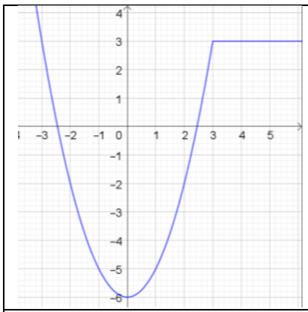
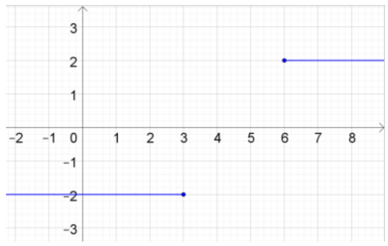
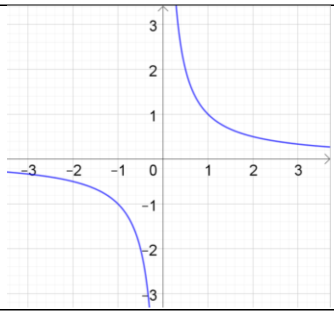
(Eigene) Beispiele & Gegenbeispiele

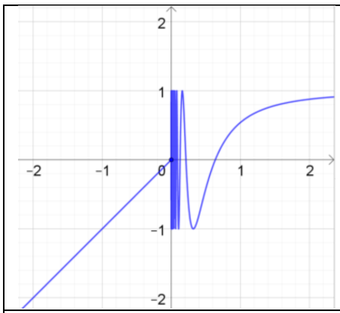
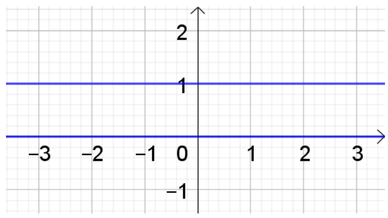
https://bit.ly/304VV1u

4) Aufgabe: Beispiele und Gegenbeispiele

An dieser Stelle geht es um die Analyse von Beispielen und Gegenbeispielen und eine anschaulich begründete Einschätzung, nicht um einen formalen Beweis.

a) Betrachten Sie die folgenden Funktionen (Geogebra): Welche sind für welche x_0 Werte stetig bzw. unstetig?

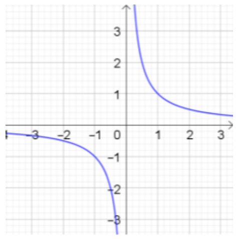
		
$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & x \leq 3 \\ 3 & sonst \end{cases}$	$f_2: \mathbb{R}\backslash(3{,}6) \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 6 \\ -2 & x \leq 3 \end{cases}$	$f_3: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \frac{1}{x}$

	
$f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_4(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \cos\left(\frac{1}{x}\right) & sonst \end{cases}$	$f_5: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_5(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

b) Überlegen Sie sich ein eigenes Beispiel für eine Funktion (oder suchen Sie eine aus Büchern oder dem Internet), die an mindestens einer Stelle unstetig ist und für eine, die auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist.

5) Aufgabe: Fallstricke und Missverständnisse

a) Auf den Definitionsbereich kommt es an.



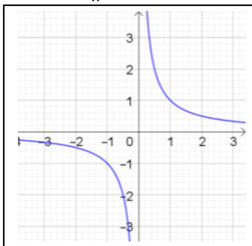
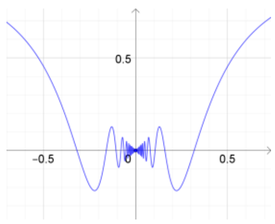
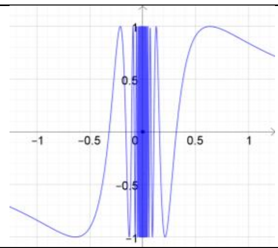
Stetigkeit ist nur für Elemente des Definitionsbereiches einer Funktion definiert. Das bedeutet aber auch, dass die Antwort auf die Frage nach Stetigkeit vom Definitionsbereich der Funktion abhängt.
So ist $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig, auf $\mathbb{R}$ (mit $f(0) = 0$) hingehen nicht für $x_0 = 0$.

Überlegen Sie:

- Ist $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig?
- Warum ist es nur sinnvoll für Elemente aus dem Definitionsbereich über Stetigkeit zu sprechen? (Tipp: An welcher Stelle der Definition (bzw. des Konzepts) bekommen Sie Schwierigkeiten, wenn Sie Elemente außerhalb des Definitionsbereiches betrachten?)

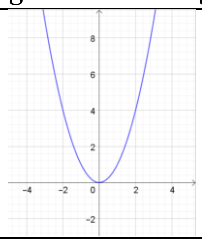
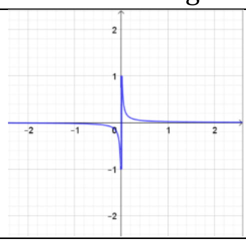
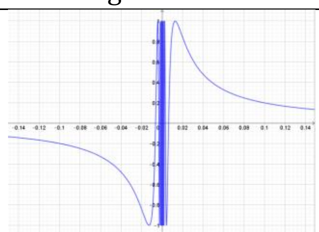
b) Durchzeichnen ohne abzusetzen?

Überlegen Sie, warum die Beschreibung *„Eine Funktion heißt stetig, wenn ich ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen."* nicht ohne Weiteres mit der vorliegenden Definition von Stetigkeit übereinstimmt. (Tipp: Was genau soll „durchzeichnen" bedeuten und was bedeutet „ohne abzusetzen"?) Betrachten Sie dazu die Funktionen:

		
$f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$	$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & sonst \\ 0 & x = 0 \end{cases}$	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & sonst \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

c) Bild des Funktionsgraphen.

Die graphische Betrachtung einer Funktion kann oft hilfreich sein, aber auch hier gibt es Aspekte, die zu beachten sind, da Achsenskalierung und Zoom einigen Einfluss auf die graphische Wirkung haben. Wo liegt das Problem bei den folgenden Visualisierungen?

		
$h(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x^2 + 0{,}001 & x \geq 0 \end{cases}$	$f(x) = \sin\left(\frac{1}{50x}\right)$	$f(x) = \sin\left(\frac{1}{50x}\right)$ bei veränderter Achsenskalierung

Außerdem hat die graphische, computergestützte Betrachtung auch dann Grenzen, wenn die Visualisierung selbst schwierig ist.

Vorstellungen zum Begriff reflektieren – Welche Vorstellungen hat man bzw. welche gibt es und wo liegen die Grenzen?

6) Aufgabe: Vorstellungen & Metaphern

Wie bereits analysiert, ist die Vorstellung von Stetigkeit als „Durchzeichnen ohne abzusetzen“ hilfreich, man sollte aber gleichzeitig ihre Grenzen kennen.

a) Im Folgenden werden einige Vorstellungen bzw. Metaphern dargestellt. Bilden diese Vorstellungen das Konzept für Sie gut ab?

   i. „Man kann die Abweichung von $f(x)$ so klein machen wie gewünscht, wenn man die Abweichung von x so klein macht wie nötig.“

   ii. „Kleine Ursache – kleine Wirkung. – Kleinen Änderungen von x entsprechen kleine Änderungen von f(x).“

   iii. „Kommt x immer näher an x_0, dann kommt auch $f(x)$ immer näher an $f(x_0)$.“

   iv. „Ich habe die Vorstellung von einer Funktion als eine Maschine, in die etwas eingegeben wird und die dann etwas ausgibt. Stetigkeit in x_0 bedeutet dann: Die Funktion ist stetig, wenn jede beliebige Genauigkeitsforderung an das Produkt um $f(x_0)$ durch eine Eingabe um x_0 herum erreicht werden kann.“

   v. „Die Änderungen in der Ausgabe sind durch die Eingabe kontrollierbar.“

b) Ist Ihre Vorstellung von Stetigkeit ähnlich zu einer der genannten oder haben Sie eine andere? Wo liegen die Grenzen Ihrer Vorstellung im Vergleich zur Definition und was sind für Sie die Stärken ihrer Vorstellung?

Stetigkeit

Teil 2

Wie unterscheidet sich der Begriff von ähnlichen Begriffen bzw. wie hängt er damit zusammen?

7) Aufgabe: Alternative Stetigkeitsdefinitionen und Vergleich mit Konvergenz

In diesem Teil geht es um einen Vergleich des Stetigkeitsbegriffs mit dem Konvergenzbegriff und eine Ausarbeitung weiterer Definitionsmöglichkeiten. Diese vernetzen das Konzept, lassen eine formale Betrachtung von „Unstetigkeitsarten" zu und geben die Möglichkeit, elegante (Un-&)Stetigkeitsbeweise führen zu können.

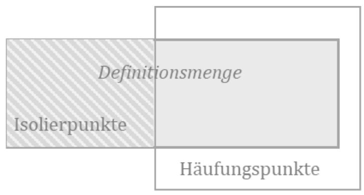
Bei der **Definition der Konvergenz für Funktionen** trat schon einmal eine $\varepsilon - \delta$- Formulierung auf, die eine ähnliche Gestalt hatte wie die Definition der Stetigkeit.

A: Vergleichen Sie die $\varepsilon - \delta$-Definition von Funktionenkonvergenz mit der $\varepsilon - \delta$-Definition von Stetigkeit und versuchen Sie darauf aufbauend, eine zur $\varepsilon - \delta$- Definition äquivalente Definitionsmöglichkeit für Stetigkeit mittels Funktionenkonvergenz zu finden.

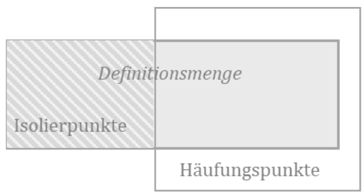
<u>oder</u>

B: Bearbeiten Sie die folgenden kleineren Teilaufgaben. Sie führen zum gleichen Ergebnis wie A.

a) *Vergleichen Sie die beiden Definitionen miteinander, markieren Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten und beschreiben Sie die Unterschiede detaillierter:*

Konvergenz von Funktionen für x gegen x_0	Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt[3] von D. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ hat für x gegen x_0 den Grenzwert a (auch $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in D \backslash \{x_0\}$ mit $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ gilt: $\lvert f(x) - a \rvert < \varepsilon$.	Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in x_0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in D$ mit $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ gilt: $\lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$.
	

b) *Die Definitionen sich einander sehr ähnlich. Überlegen Sie, inwiefern man Stetigkeit auch über die Konvergenz einer Funktion definieren könnte. Beschränken Sie Ihre Betrachtung zunächst auf Häufungspunkte.*



Damit ergibt sich nun noch keine alternative Definition, denn aktuell sind nur Stetigkeitsfragen für Häufungspunkte geklärt. Für die Punkte der Definitionsmenge, die keine Häufungspunkte sind (auch isolierte Punkte[4] genannt), ist Stetigkeit

---

[3] Erinnerung: x_0 heißt Häufungspunkt von D, falls in jeder ε-Umgebung von x_0 mindestens ein $x \in D, x \neq x_0$ liegt.

[4] Isolierte Punkte (x_0) sind also solche Elemente des Definitionsbereiches, für die es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass kein $x \in D, x \neq x_0$ existiert, das in der ε- Umgebung um x_0 liegt. Man könnte auch sagen, x_0 hat einen gewissen „Abstand" zu den restlichen Elementen des Definitionsbereiches, ist also „isoliert".

noch nicht alternativ definiert. Man kann sich aber überlegen, dass eine Funktion für isolierte Punkte immer stetig ist.

c) *Warum sind Funktionen in isolierten Punkten immer stetig?*
d) *Formulieren Sie auf Basis der letzten Aufgaben eine alternative Definition für Stetigkeit mit Hilfe des Grenzwertbegriffs (d.h. stellen Sie eine Äquivalenz zum Stetigkeitsbegriff her).*

Da man nun Stetigkeit auch über Konvergenz definieren könnte, liegt es nahe, auch die äquivalente **Definition für Konvergenz über Folgen** noch zu betrachten. Daraus lässt sich eine weitere alternative Stetigkeitsdefinition erarbeiten.

Konvergenzdefinition über Folgen:

> Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ hat für x gegen x_0 den Grenzwert a (auch $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$), wenn für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert und für die $x_n \neq x_0$ für alle $n \in N$ gilt, die Folge $(f(x_n))$ gegen a konvergiert.

A: Erarbeiten Sie eine weitere Stetigkeitsdefinition, indem Sie die Stetigkeitsdefinition über Konvergenz mit der Konvergenzdefinition über Folgen verbinden.

<u>oder</u>

B: Bearbeiten Sie die folgenden kleineren Teilaufgaben. Sie führen zum gleichen Ergebnis wie A.

a) *Stetigkeit wurde im vorherigen Abschnitt über Konvergenz definiert und soll nun um eine äquivalente Konvergenzdefinition angereichert werden. Welcher Teil der Stetigkeitsdefinition kann mit Hilfe der Konvergenzdefinition über Folgen beschrieben werden?*

Konvergenz von Funktionen für x gegen x_0 über Folgen	Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0 über Konvergenz
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ hat für x gegen x_0 den Grenzwert a (auch $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$), wenn für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert und für die $x_n \neq x_0$ für alle $n \in N$ gilt, die Folge $(f(x_n))$ gegen a konvergiert.	Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in x_0, wenn x_0 ein isolierter Punkt ist oder wenn x_0 ein Häufungspunkt ist und $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

b) *Kann man nun noch „eleganter“ mit den Isolierpunkten umgehen? Inwiefern hängen diese damit zusammen, dass $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten soll?*

c) *Zeigen Sie, dass man auf eine Unterscheidung zwischen Isolier- und Häufungspunkten verzichten kann, wenn man auf $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ verzichtet, dass also die folgende Äquivalenz gilt:*

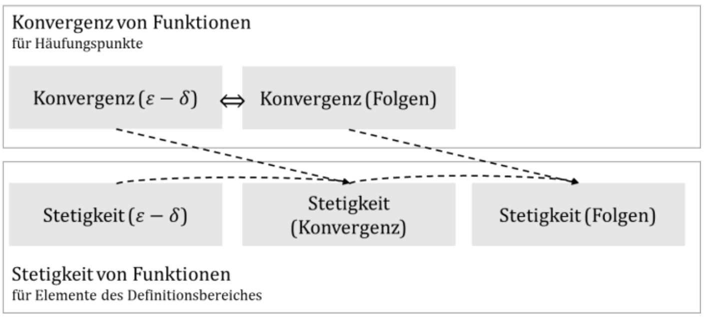
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, f Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) Für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert, konvergiert die $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$.
2) x_0 ist ein Isolierpunkt oder x_0 ist ein Häufungspunkte und für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert ($x_n \neq x_0$ für alle $n \in N$), konvergiert die Folge $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$.

d) *Formulieren Sie auf Basis der letzten Aufgaben eine alternative Definition für Stetigkeit mit Hilfe von Folgen (d.h. stellen Sie eine Äquivalenz zum Stetigkeitsbegriff her).*

Zusatz: *Beweisen Sie direkt die Äquivalenz zwischen der $\varepsilon - \delta$-Definition von Stetigkeit und der Definition über Folgen.*

Zusammenfassung



Wir haben in diesem Teil die Ähnlichkeit der Stetigkeitsdefinition über $\varepsilon - \delta$ mit der Konvergenzdefinition über $\varepsilon - \delta$ genutzt, um eine äquivalente Stetigkeitsdefinition über Konvergenz herzuleiten.
Die Äquivalenz der Konvergenzdefinition über $\varepsilon - \delta$ mit der Konvergenzdefinition über Folgen wiederum führte zur Entwicklung einer Stetigkeitsdefinition über Folgen – immer unter Berücksichtigung der Spezifik, dass sich Konvergenz auf Häufungspunkte, Stetigkeit auf Elemente des Definitionsbereiches bezieht.

e) *Fassen Sie die Erkenntnisse dieses Teilkapitels zusammen, indem Sie alle äquivalenten Definitionen für Stetigkeit noch einmal ausformulieren:*

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

($\varepsilon - \delta$-Definition)

(Konvergenzdefinition)

(Folgendefinition)

f) *Welche Vorstellung bzw. Metapher oder „saloppe" Formulierung könnten Sie auf Basis der Konvergenzdefinition bzw. Folgendefinition nun für Stetigkeit nutzen?*

Typologie der Gegenbeispiele: Auf welche Weise kann ein konkretes Objekt zum Gegenbeispiel werden?

https://bit.ly/31HGPPE

8) Aufgabe: Arten von Unstetigkeit

Mit der alternativen Definition von Stetigkeit über den Grenzwert kann man nun die „Arten von Unstetigkeit“ formal gut unterscheiden:

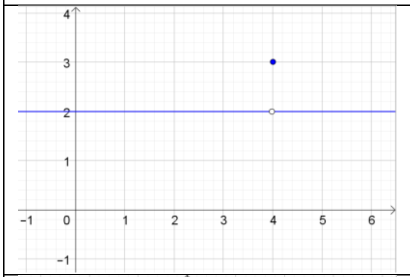
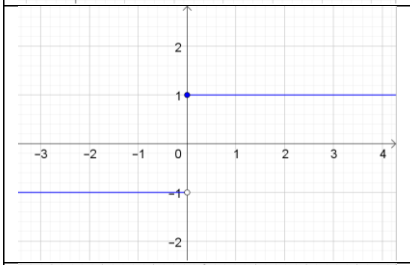
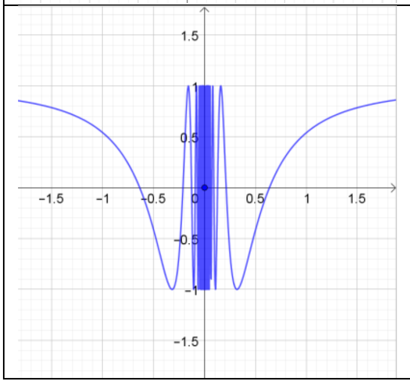
Die Definition von Stetigkeit über den Grenzwert verlangt, dass x_0 ein Isolierpunkt ist oder x_0 Häufungspunkt ist und

(1) Der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert **und**

(2) dieser gleich $f(x_0)$ ist (also: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$)

Eine Funktion ist folglich unstetig, wenn (1) **oder** (2) im Fall eines Häufungspunktes nicht eintritt (wobei (2) ohne (1) nicht sinnvoll ist): Eine Funktion f in einem Häufungspunkt $x_0 \in D$ ist unstetig, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x)$ nicht existiert oder aber $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ gilt.[5]

Betrachten Sie erneut die folgenden Funktionen und beschreiben Sie, inwiefern die Definition von Stetigkeit über Konvergenz verletzt wird:

Graph	Vorschrift	Inwiefern ist Definition von Stetigkeit über Konvergenz verletzt?
	$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \begin{cases} 3 & x = 4 \\ 2 & sonst \end{cases}$	
	$f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$	
	$f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$	

[5] Isolierpunkte braucht man bezüglich Unstetigkeit nicht betrachten, da die Funktion in diesen immer stetig ist.

Wie kann nachgewiesen werden, dass ein konkretes Objekt die geforderten Eigenschaften erfüllt bzw. nicht erfüllt?

9) Aufgabe: Stetigkeit und Unstetigkeit nachweisen

Die bisherigen Betrachtungen von stetigen und unstetigen Funktionen fokussierten immer eine anschauliche Begründung, die nicht formalisiert werden musste. Für einen Beweis muss über die Definitionen begründet werden, warum die definierende Eigenschaft zutrifft (im Fall der Stetigkeit) oder verletzt wird (im Fall der Unstetigkeit), oder aber man kann weitere Eigenschaften stetiger Funktionen nutzen.

Mit den verschiedenen Definitionen stehen nun verschiedene Wege offen, Stetigkeit oder Unstetigkeit nachzuweisen.

a) *Füllen Sie die leeren Felder in der Tabelle aus, indem Sie sich überlegen, was genau Sie tun müssen, um mit Hilfe der entsprechenden Definition Stetigkeit oder Unstetigkeit nachzuweisen.*

	Stetigkeit nachweisen	**Unstetigkeit nachweisen**
$\varepsilon-\delta$-Definition	Man muss zeigen, dass es zu jedem beliebigen ε ein δ gibt, sodass für alle x im Definitionsbereich, die $\lvert x-x_0\rvert<\delta$ erfüllen, auch $\lvert f(x)-f(x_0)\rvert<\varepsilon$ gilt. Konkret bedeutet das meist: Man lässt $\varepsilon>0$ beliebig und sucht in Abhängigkeit von ε und x_0 ein $\delta>0$, dass die genannte Eigenschaft erfüllt.	
Definition über Konvergenz		Man muss zeigen, dass der Grenzwert der Funktion nicht existiert oder nicht gleich dem Funktionswert ist.
Definition über Folgen	Man muss zeigen, dass für jede Folge$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert, die Funktionswerte der Folge gegen $f(x_0)$ konvergieren. *Man kann also die Grenzwertsätze für Folgen nutzen, um Stetigkeit nachzuweisen.*	

Ergänzung: Beispiele

Im Dokument „(Un-)stetigkeit nachweisen" finden Sie auch Musterbeispiele für jeden Fall und eine Übungsaufgabe. Es wurde darüber hinaus versucht, eine „verallgemeinerte Strategie" darzustellen. Es gibt aber kein festes Verfahren, das immer zum Ziel führen würde und auch die vorgestellte „verallgemeinerte Strategie" kann für konkrete Funktionen gegebenenfalls nur sehr schwierig umzusetzen sein.

Stetigkeit mit Hilfe von Verknüpfungen

Die enge Verknüpfung der Stetigkeit mit der Konvergenz von Funktionen bzw. Folgen deutet schon darauf hin, dass man hier ganz ähnliche Aussagen über die Verknüpfung stetiger Funktionen tätigen kann wie bei konvergenten Funktionen bzw. Folgen. Insbesondere der Nachweis der Stetigkeit mittels der Grenzwertsätze für die Funktion zeigt dies ganz deutlich. Hier wird die Stetigkeit einer zusammengesetzten Funktion im Prinzip auf die Stetigkeit der Einzelfunktionen mittels Grenzwertsätzen zurückgeführt:

Beispiel: Nachweis der Stetigkeit der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$ auf ihrem Definitionsbereich unter Ausnutzung der Grenzwertsätze:

$$\lim_{x \to x_0} (x^2 + x) = \lim_{x \to x_0} x^2 + \lim_{x \to x_0} x = \left(\lim_{x \to x_0} x\right)^2 + \lim_{x \to x_0} x = x_0^2 + x_0.$$

Damit gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0^2 + x_0 = f(x_0)$ für alle $x_0 \in D$.

Man kann also die folgenden Sätze für Verknüpfungen stetiger Funktionen vermuten:

- Sei $D \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$. Sind $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen in $x_0 \in D$, so sind
  - $f + g$ stetig in x_0
  - $\lambda \cdot f$ stetig in x_0
  - $f \cdot g$ stetig in x_0
  - $|f|$ stetig in x_0
  - $\frac{f}{g}$ stetig in x_0 mit $\frac{f}{g}\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ mit $\widetilde{D} = \{x \in D\colon g(x) \neq 0\}$, wenn zusätzlich noch $g(x_0) \neq x_0$
- Seien $D, W \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$. Sind $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon W \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq W$ sowie f stetig in $x_0 \in D$ und g stetig in $f(x_0) \in W$, dann ist die Hintereinanderausführung der Funktionen

$$g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$$

  in x_0 stetig. ($g \circ f$ bedeutet: $g(f(x))$).

Unter Berücksichtigung entsprechender Definitionsbereiche und Voraussetzungen ist die **Addition,**

Vervielfachung,

Multiplikation,

Division,

Betragsbildung und

Hintereinanderausführung

stetiger Funktionen wieder stetig.

Daraus folgt: Der Nachweis der Stetigkeit einer Funktion kann durch die Verknüpfung stetiger Funktionen begründet werden:

Beispiel:

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$,

denn: $f(x) = g(x) \cdot |g(x)|$ mit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x$.

Da g stetig ist auf $\mathbb{R}$, ist auch $|g|$ stetig sowie die multiplikative Verknüpfung der beiden Funktionen $g \cdot |g| = f$. Also ist auch f stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

b) *Weisen Sie einen der Sätze für Verknüpfungen stetiger Funktionen nach, indem Sie auf den entsprechenden Sätzen über die Verknüpfung von Folgen oder konvergenten Funktionen aufbauen.*

c) *Begründen Sie durch Anwendung der obigen Sätze die Stetigkeit von $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4 \cdot |x|^3 + x}{x}$ auf dem ganzen Definitionsbereich.*

10) Verbundene Aspekte

Aspekte des Themengebietes sammeln.

a) Durchsuchen Sie Ihre Vorlesungsunterlagen (Skript, Übungsblätter) nach Sätzen oder Definitionen, die mit Stetigkeit in Verbindung stehen und notieren Sie diese (entweder vollständig oder durch Schlagworte).

b) Betrachten Sie die Definitionen oder Sätze, von denen Sie nicht sicher sind, was sie bedeuten, noch einmal genauer. Suchen Sie ggf. Beispiele und Gegenbeispiele.

Ordnen & Überblick verschaffen.

c) Ordnen Sie alle Aspekte für sich.[6] Dafür könnten folgende Fragen hilfreich sein:
   a. Gibt es einen logischen Zusammenhang (bspw. was folgt aus was)?
   b. Gibt es ein markantes Beispiel dafür, dass eine bestimmte Beziehung nicht gilt?
   c. Welche Begriffe oder Sätze sind einander ähnlich?

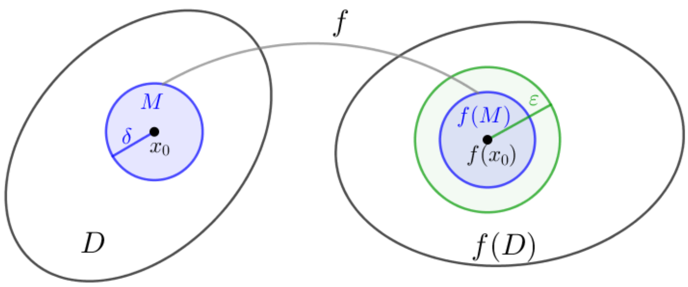
[6] Hier gibt es keine per se „richtige“ und „falsche“ Ordnung, wichtig ist, dass Sie die Aspekte „für sich“ strukturieren.

Stetigkeit

Teil 3

11) Verallgemeinerungen

Funktionen oder Abbildungen sind allgemein definiert als eindeutige Zuordnung zwischen zwei Mengen. Diese Mengen müssen nicht notwendigerweise $\mathbb{R}$ oder ein Teil davon (bspw. $\mathbb{R}^+, \mathbb{N}$...) sein.



$M := \{x \in D : |x - x_0| < \delta\}$

Entsprechend kann man sich auch fragen, ob die verschiedenen Begriffe, die für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert sind, auch für Funktionen zwischen anderen Mengen ausgeweitet werden können bzw. angepasst werden können.

Visualisiert man sich eine Menge gedanklich als beliebige „Fläche“, so könnte eine Vorstellung der $\varepsilon - \delta$-Stetigkeit aussehen wie in der Skizze. Intuitiv wurden hier die ε-Umgebung und die δ-Umgebung an die 2-dimensionale Mengenvisualisierung angepasst und als Kreis „gedacht“.

Um doch wieder etwas konkreter zu werden, kann man im ersten Schritt eine etwas andere Veranschaulichung von Stetigkeit für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten und diese Betrachtung in einem zweiten Schritt auf Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, sowie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ausweiten.

a) Visualisierungen für Stetigkeit für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
https://bit.ly/2YQOL4r

Erklärung zur Geogebra-Datei
https://bit.ly/2Nb25cD

Für gewöhnlich visualisieren Sie eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem 2-dimensionalen Koordinatensystem. Diese gewöhnliche Visualisierung soll um eine weitere Möglichkeit angereichert werden.

Visualisiert man eine Funktion als Abbildung von einer Menge in eine andere, so würde man für Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ zwei Zahlenstrahlen brauchen, zwischen denen abgebildet wird. Diese kann man entweder übereinander anordnen oder nebeneinander (Bild 1). Eine weitere Alternative besteht darin, die Funktion nur auf einem Zahlenstrahl zu verdeutlichen, was allerdings etwas unübersichtlicher wäre (Bild 2):

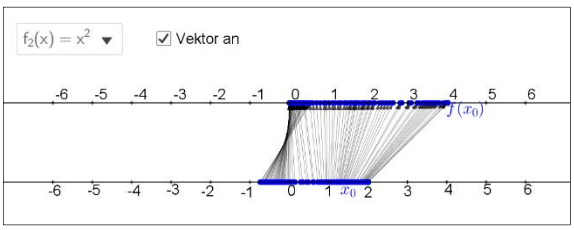


Bild 1: Übereinander

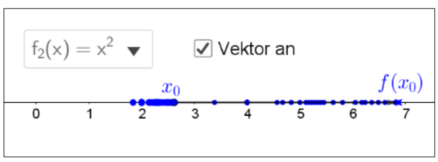


Bild 2: Auf einem Zahlenstrahl.

Erkunden Sie diese Form der Darstellung (Bild 1) in Geogebra.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
https://bit.ly/2OXAgqT

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
https://bit.ly/2Z71yPu

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
https://bit.ly/2KCPkWs

b) *Visualisierungen für Stetigkeit für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzw. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.* [7]

Untersuchen Sie für jeden Funktionstyp exemplarisch einige Funktionen in der jeweiligen Geogebra-Datei auf Stetigkeit. Ist „Abstand“ bei allen Funktionstypen gleich „definiert“?

c) *Vermutung über eine Verallgemeinerung*

Wenn Sie nun die verschiedenen Funktionstypen betrachten und die jeweiligen Untersuchungen bezüglich Stetigkeit, so wurde intuitiv der Abstandsbegriff an die jeweilige Menge „angepasst“. Abstände in $\mathbb{R}$ wurden wie gewöhnlich als Betrag der Differenz zweier reeller Zahlen bestimmt. Bei „Abständen“ in $\mathbb{R}^2$ wurden intuitiv ε, δ- „Kreise“ verwendet und Abstände würden als Betrag der Differenz zweier Vektoren berechnet, wobei der Betrag hier anders bestimmt wird als in $\mathbb{R}$.[8] Für den $\mathbb{R}^3$ würde man intuitiv mit ε, δ-Kugeln arbeiten. Betrachtet man also den Stetigkeitsbegriff fortgesetzt für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, so würde man intuitiv die Berechnung der Beträge an die jeweilige Menge anpassen (hier gekennzeichnet durch den Zusatz am Betrag).

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}^2$ heißt stetig in x_0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

für alle $x \in D$ mit $|x - x_0|_{\mathbb{R}} < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)|_{\mathbb{R}^2} < \varepsilon$.

Hätte man also zwei beliebige Mengen M, N, für die man jeweils einen Abstandsbegriff hätte, dann könnte man die $\varepsilon - \delta$-Definition von Stetigkeit für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Funktionen $f: M \to N$ direkt übertragen.

Vervollständigen Sie dazu die Definition:

Vermutete Definition: Sei $D \subseteq M$ und $x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to N$ heißt stetig in x_0,

Für diese Definition wird quasi vorausgesetzt, dass auf M und N ein Abstand definiert ist. Es ist aber gar nicht klar, was „Abstand“ überhaupt sein soll und wie das näher definiert ist.[9] Diese Betrachtung führt schließlich zum Begriff der Metrik.

[7] Allgemeine Informationen zu verschiedenen Möglichkeiten der Darstellung von Funktionen finden Sie auch unter: https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks:_Komplexe_Zahlen:_Darstellung_komplexwertiger_Funktionen

[8] Das lässt sich zwar ineinander überführen: Für zwei reelle Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt: $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$. Für zwei Vektoren $\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2} \in \mathbb{R}^2$ würde man berechnen: $\left|\binom{x_1}{y_1} - \binom{x_2}{y_2}\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Diese beiden Berechnungsformen sind daher gewissermaßen strukturgleich, was auch erkennbar ist, wenn noch um die Abstandberechnung in $\mathbb{R}^3$ ergänzt wird. Allerdings zeigt das trotzdem eine gewisse „Anpassung“ der Abstandsberechnung auf.

[9] An dieser Stelle handelt es sich nur um einen kurzen „Ausblick“, der nicht weiter vertieft wird. Die Definition von Metrik deckt aber ab, was man von einem „Abstand“ erwarten würde: Der Abstand eines Elementes zu sich selbst ist 0 und zu einem anderen immer größer als 0 (I), der Abstand zwischen zwei Elementen ist gleich, egal, von welchem man „ausgeht“ (II) und der Abstand vergrößert sich, wenn man einen „Umweg“ über ein drittes Element geht (III). Eine Metrik ist eine Funktion auf einer nicht-leeren Menge M, die genau diese Aspekte erfüllt.

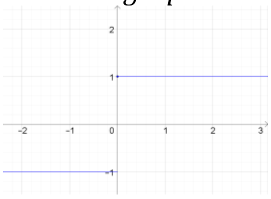
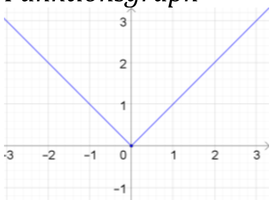
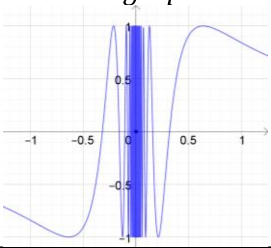
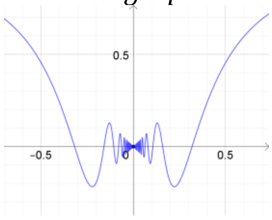
Stetigkeit - Lösungen

(für reellwertige Funktionen einer Variablen)

Teil 1

1) Aufgabe: Einstieg

An der zu betrachtenden Stelle $x_0 = 0$ verhalten sich die verschiedenen Funktionen sehr unterschiedlich.

Funktionsgraph	*Funktionsvorschrift*	*Funktionsgraph*	Funktionsvorschrift
	$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$		$f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \lvert x \rvert$
Funktionsgraph	*Funktionsvorschrift*	*Funktionsgraph*	*Funktionsvorschrift*
	$f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$		$f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_4(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

- Funktion f_1 weicht an dieser Stelle vom „erwarteten“ Verlauf (von negativen x-Werten kommend) ab und die Funktion macht an dieser Stelle quasi einen „Sprung“ von -1 zu 1. Ändert man $x_0 = 0$ nur ein bisschen ins Negative bzw. betrachtet x-Werte, die kleiner Null sind, dann ändert sich der Funktionswert sofort von 1 auf -1. Es ist nicht möglich, den Funktionswert um bspw. maximal 0,5 abzusenken, ganz egal wie klein man die Abweichung von $x_0 = 0$ wählt. Es ist also nicht möglich, dass sich die Funktionswerte bei einer kleinen Veränderung von x nur „ein bisschen“ ändern. Nähert man sich an x_0 an, so nähert sich also nicht zwangsweise dem Funktionswert $f(x_0)$ an.
- Funktion f_2 weicht an dieser Stelle in dem Sinne vom „erwarteten“ Verlauf ab, als sich die „gleichmäßige“ Bewegung plötzlich ändert. Das hat allerdings einen anderen Charakter als bei f_1. Bei f_2 führt eine kleine Veränderung von x_0 „währenddessen“ auch nur zu einer kleinen Veränderung des Funktionswertes und für jede beliebige Änderung des Funktionswertes kann – anders als bei f_1 – eine Umgebung um x_0 gefunden werden, welche maximal diese Änderung erzeugt (bspw. für $f(x) = 0{,}001$ wähle $x = 0{,}001$). Nähert man sich an x_0 an, so nähert sich auch der Funktionswert $f(x_0)$ an.
- f_3 kann kaum angezeigt werden, weil sie immer schneller oszilliert. Bewegt man sich auf x_0 zu, so schwankt die Funktion immer schneller zwischen -1 und 1 hin und her. Verändert man x_0 nur ein bisschen (also beliebig wenig), so hat sich die Funktion „währenddessen“ schon unendlich oft zwischen -1 und 1 hin und her bewegt. Es ist also beispielsweise nicht möglich, durch eine Variation von x_0 die Funktionswerte währenddessen nur um weniger als 1 zu verändern, da die Funktion „währenddessen“ schon wieder unendlich oft zwischen -1 und 1 hin und her geschwankt ist und damit schon wieder unendlich oft um 1 von $f(x_0)$ abgewichen wäre. Nähert man sich x_0 von einer Seite, so nähern und entfernen siech die Funktionswerte immer, man nähert sich $f(x_0)$ also nicht grundsätzlich immer mehr an, da immer wieder Werte von 1 und -1 angenommen werden.

- f_4 kann kaum angezeigt werden, weil sie immer schneller oszilliert. Im Gegensatz zu f_3 wird die Amplitude aber immer kleiner. Verändert man x_0 ein bisschen, so ändert sich „währenddessen“ auch $f(x_0)$ nur ein bisschen. Nähert man sich x_0 von einer Seite, so nähern sich auch die Funktionswerte $f(x_0)$.

2) $\varepsilon - \delta -$ Definition

a)

	Findet man für das <u>eingestellte</u> $x_0 = 0$ zu jedem ε ein passendes δ?	Findet man für <u>andere</u> x_0 zu jedem ε ein passendes δ?
f_1	Nein, nicht für $\varepsilon < 2$.	Für alle $x_0 \neq 0$ findet man zu jedem ε ein passendes δ.
f_2	Ja.	Ja, das gelingt für alle $x_0 \in D$.
f_3	Nein, nicht für $\varepsilon < 1$.	Für alle $x_0 \neq 0$ findet man zu jedem ε ein passendes δ.[1]
f_4	Ja.	Ja, das gelingt für alle $x_0 \in D$.

3) Formulierung und Struktur der Definition

Im Folgenden wird die Definition sehr genau auf verschiedenen Ebenen betrachtet.

a) Grobstruktur der Definition

- Über welche Gegenstände wird eine Aussage getroffen?
  Über Funktionen auf einem Körper.
- Welcher Begriff wird definiert (Definiendum)?
  Stetigkeit einer Funktion für ein Element x_0 aus dem Definitionsbereich; die Frage der Stetigkeit stellt sich also nur für Elemente aus dem Definitionsbereich.
- Welches sind die definierenden Eigenschaften (Definiens)?
  Für alle ε muss man ein δ finden, sodass die Funktionswerte aller x, die in der δ-Umgebung um x_0 liegen, in der ε-Umgebung um $f(x_0)$ liegen.

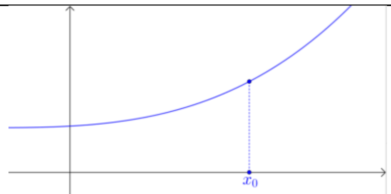
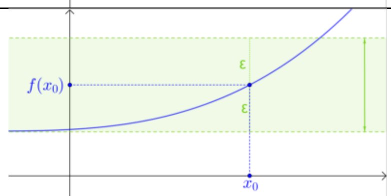
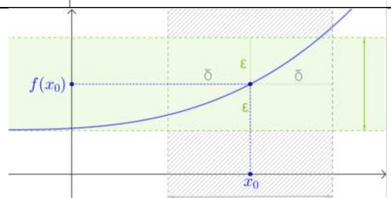
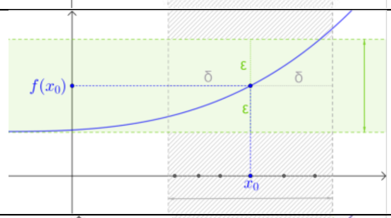
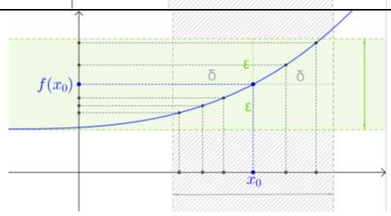
[1] Es muss aber ggf. weit genug in die Grafik „hineingezoomt“ werden, um das zu erkennen. Stellt man sich die Funktion grafisch vor, so ist völlig klar, dass man sich für $x_0 \neq 0$ in einer „Schwingung“ im Sinne einer Sinusfunktion mit sehr kurzer Periodendauer befindet. Man kann also in der Vorstellung „hineinzoomen“ und wählt dann den entsprechenden Ausschnitt der Periode aus, indem die Funktion sich nur um den vorgegebenen Wert verändert.

b) *Die Definition im Detail*

Es handelt sich hierbei um einen Vorschlag, Ihre Bearbeitung kann ganz anders aussehen:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.	Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in x_0,	*für jedes* $\varepsilon > 0$	*existiert ein* $\delta > 0, sodass$	*für alle* x *aus* D *mit* $\lvert x - x_0\rvert < \delta$ *gilt*	$\lvert f(x) - f(x_0)\rvert < \varepsilon$
x_0 ist ein Element der Menge D, die eine Teilmenge der reellen Zahlen ist	Eine Funktion f von einer Teilmenge D von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ heißt für ein x_0 aus dem Defintiionsbereich stetig, wenn	Für jede positive (reelle) Zahl, genannt ε (also $\varepsilon > 0$)	Eine positive (reelle) Zahl δ existiert, die etwas bestimmten erfüllen soll (Sodass)	Für alle Elemente des Definitionsbereiches D gelten, die $\lvert x - x_0\rvert < \delta$ erfüllen, also einen Abstand kleiner δ von x_0 haben, die (noch folgende) Aussage gilt:	Der Abstand des Funktionswertes von x ($f(x)$) zum Funktionswert von x_0 ($f(x_0)$)ist kleiner als ε

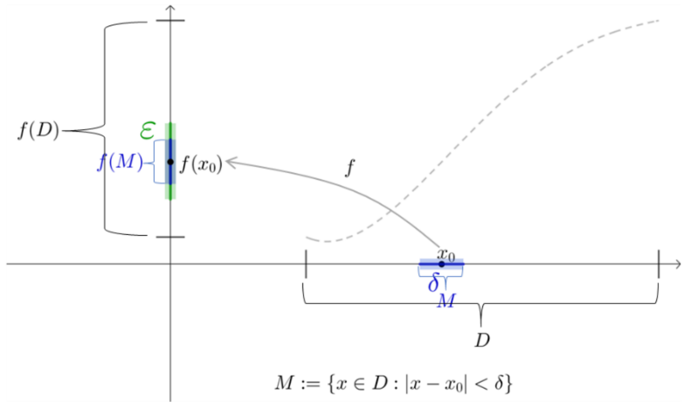
c) *Graphische Deutung der Definition*

Zergliederung der Definition	Beschreibung	Bild
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.	Angabe des Definitionsbereiches als Teilmenge der reellen Zahlen. Sei x_0 ein Element der Definitionsmenge.	
Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in x_0, wenn	Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in x_0, wenn	
es zu jedem $\varepsilon > 0$	es zu jeder beliebigen Umgebung um $f(x_0)$ (beschrieben durch ε)	
ein $\delta > 0$ gibt, sodass	eine Umgebung um x_0 gibt (beschrieben durch δ), sodass	
für alle $x \in D$ mit $\lvert x - x_0\rvert < \delta$ gilt	für alle x in der δ-Umgebung um x_0	
$\lvert f(x) - f(x_0)\rvert < \varepsilon$	alle zugehörigen Funktionswerte $f(x)$ in der ε-Umgebung um $f(x_0)$ liegen.	

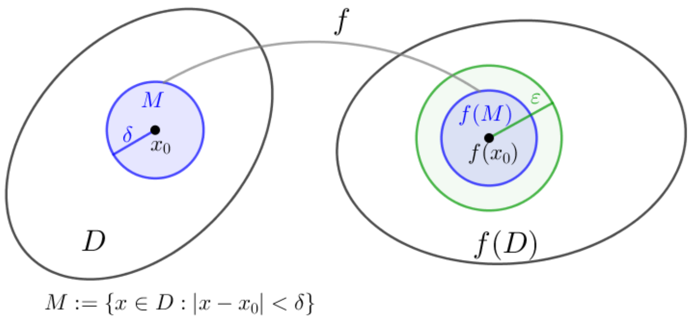
d) Sprachliche Variation der Definition

Man betrachtet ein Element x_0 aus der Definitionsmenge D, welche eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Eine Funktion f mit Definitionsbereich D, die Elemente aus dem Definitionsbereich nach $\mathbb{R}$ abbildet, nennt man stetig im Element x_0, wenn zu einer beliebigen positiven, reellen Zahl größer als 0 (genannt ε) eine positive reelle Zahl größer Null (genannt δ) existiert, sodass für alle Elemente, deren Abstand zu x_0 maximal δ beträgt, die Funktionswerte ($f(x)$) einen maximalen Abstand von ε zu $f(x_0)$ haben.

e) Visualisierung



Visualisierung zweidimensional von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



„Verallgemeinerte" Visualisierung.

4) Beispiele und Gegenbeispiele

f_1 ist stetig auf dem gesamten Definitionsbereich ($\mathbb{R}$).

f_2 ist stetig, auch wenn sie anschaulich gesprochen einen „Sprung" macht. Dieser fällt aber genau in die Lücke des Definitionsbereiches, Stetigkeit wird aber nur für Elemente des Definitionsbereiches sinnvoll diskutiert. Für $x_0 = 3$ oder $x_0 = 6$ findet man ebenfalls zu jedem ε ein δ, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $|x - x_0| < \delta$, weil eben nur die Elemente des Definitionsbereiches angesehen werden.

f_3 ist ebenfalls stetig, da 0 nicht im Definitionsbereich liegt und das die einzig kritische Stelle wäre.

f_4 ist nicht stetig in $x_0 = 0$, sonst ist sie stetig. Es handelt sich hierbei wieder um eine oszillierende Funktion, welche immer schneller hin und her schwingt, wenn man sich $x_0 = 0$ von der „positiven Seite" nähert. Trotzdem wird bei jeder Schwingung die 1 angenommen, sodass für $\varepsilon \leq 1$ kein δ gefunden werden kann.

f_5 ist nicht stetig, da in jeder noch zu kleinen δ-Umgebung um eine rationale Zahl wieder eine irrationale Zahl liegt und umgekehrt ebenfalls.

5) Fallstricke und Missverständnisse

a) *Auf den Definitionsbereich kommt es an*:

- $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, die kritische Stelle $x_0 = 0$ wurde gerade aus dem Definitionsbereich herausgenommen
- Das Konzept der Stetigkeit ist nicht sinnvoll, wenn man $f(x_0)$ nicht bestimmen kann. Denn dann ist überhaupt nicht klar, welchem Wert sich die Funktionswerte annähern sollen bzw. zu welchem Wert sie sich nicht weiter als ε unterscheiden sollen.

b) Durchzeichnen ohne abzusetzen

Einen Graphen durchzeichnen können, ohne den Stift abzusetzen, stellt keine mathematische Definition dar und lässt Interpretationsspielraum: Soll davon ausgegangen werden, dass die Zeichnung durch den Stift selbst eine Dicke hat? Dann müsste für sehr kleine „Sprünge" nicht der Stift abgesetzt werden. Angenommen, man geht von einem „theoretischen" Stift aus, muss also keine Dicke der Linie berücksichtigen. Dann bleibt immer noch die Frage, ob sie oszillierenden Sinusfunktionen stetig sind. Es lässt sich dann schwer argumentieren, warum die eine „durchzeichenbar" ist und die andere nicht. Ein weiteres Argument liefert $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Die Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich stetig, auch wenn sie nicht „durchzeichenbar" ist „ohne den Stift abzusetzen". Die Durchzeichenbarkeit liefert also keine gleichwertige Beschreibung zur Definition von Stetigkeit, aber sie ist eine hilfreiche Vorstellung, die in vielen Fällen auch zu einer richtigen Vermutung bezüglich Stetigkeit & Unstetigkeit führt.

c) Bild des Funktionsgraphen

Graphische Darstellungen von Funktionen bspw. durch Computerprogramme können für erste Einschätzung helfen, allerdings können sie auch fehlleiten wie im Beispiel gezeigt. Daher sollte immer noch einmal der Funktionsterm betrachtet werden und die „eigene Vorstellungskraft" bemüht werden. Eine Veranschaulichung alleine ist auch noch kein Beweis, hilft aber vielleicht, eine Beweisidee zu entwickeln. Darüber hinaus gibt es Funktionen, die nicht mehr in dieser Form graphisch darstellbar sind.

Häufig führt eine unterschiedliche Achsenskalierung oder ein veränderter Zoom schon zu einem anderem Blick auf die Funktion, aber auch die Graphikprogramme stoßen an ihre Grenzen – beispielsweise beim Versuch, immer weiter in (0,0) hineinzuzoomen bei $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oder bei der Frage, wie die Dirichlet-Funktion angezeigt werden soll. Die Funktion bildet alle irrationalen zahlen auf 1 ab und alle rationalen auf 0. Das lässt sich aber eigentlich nur durch zwei parallele Geraden $f_1(x) = 0$ und $f_2(x)$=1 oder durch Folgen mit $x_n = 1$ und $y_n = 0$ „visualisieren". Keines von beiden trifft aber das tatsächliche „Aussehen". Hier ist die „eigene Vorstellungskraft" wahrscheinlich hilfreicher.

6) Vorstellungen & Metaphern

Wie bereits analysiert, ist die Vorstellung von Stetigkeit als „Durchzeichnen ohne abzusetzen" hilfreich, man sollte aber gleichzeitig ihre Grenzen kennen.

i. Diese Beschreibung beschreibt Stetigkeit sehr passend, bleibt aber auch sehr dicht bei der Formulierung von Stetigkeit. Auch hier müsste man sich bewusst sein, dass die Abweichung von $f(x)$ innerhalb einer ganzen Umgebung um x_0 eingehalten werden muss.

ii. Diese Beschreibung ist sehr eingängig, leider lässt sie aber auch viele Fragen offen. Was genau soll „klein" dabei bedeuten? Das müsste genauer geklärt werden, was über „kleine Ursachen – keine große Wirkung" vielleicht besser gelingen könnte.

iii. Diese Metapher stimmt auch, bezieht sich aber stärker auf eine alternative Definition von Stetigkeit, die Sie in Aufgabe 7 näher kennenlernen. Aber auch bei dieser Vorstellung bleiben Fragen offen, da unklar ist, was mit „kommt näher" gemeint ist.

iv. Die Vorstellung beschreibt die Stetigkeit relativ passend, es muss nur bedacht werden, dass mit „um x_0 herum" gemeint ist, dass nicht zu jeder Genauigkeitsforderung nur ein x gefunden werden muss, das diese erfüllt, sondern dass eine Umgebung um x_0 gefunden werden muss, für die das gilt.

v. Diese Beschreibung ist etwas ungenauer als die vorherige, geht aber in eine ähnliche Richtung, auch wenn hier zusätzlich noch geklärt werden müsste, was „kontrollierbar" bedeuten soll.

Stetigkeit

Teil 2

7) Alternative Stetigkeitsdefinitionen und Vergleich mit Konvergenz

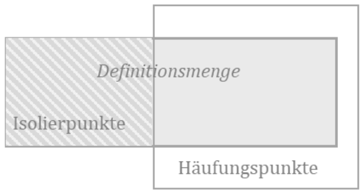
a)

<table>
<tr><th>Konvergenz von Funktionen für x gegen x_0</th><th>Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0</th></tr>
<tr><td>Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt[2] von D.

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ hat für x gegen x_0 den Grenzwert a (auch $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$),

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in D \backslash \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - a| < \varepsilon$.</td><td>Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in x_0,

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Beschreibung der Unterschiede:
Im Fall der Konvergenz muss x_0 ein Häufungspunkt sein, bei Stetigkeit ein Element des Definitionsbereichs. Das ist nicht das gleiche, da Häufungspunkte nicht im Definitionsbereich liegen müssen, aber die Elemente des Definitionsbereiches auch keine Häufungspunkte sein müssen.


Bei der Konvergenz müssen die Funktionswerte in einer ε-Umgebung um a liegen, bei der Stetigkeit in einer ε-Umgebung um $f(x_0)$.
Zudem muss bei Konvergenz für x_0 die Beziehung $|f(x_0) - a| < \varepsilon$ nicht gelten, was sinnvoll ist, da $f(x_0)$ ja gegebenenfalls gar nicht definiert ist.</td></tr>
</table>

b)

Stetigkeit wird nur für Elemente des Definitionsbereiches betrachtet, andererseits kann der Konvergenzbegriff nur für einen Häufungspunkt genutzt werden. Betrachtet man alle Häufungspunkte im Definitionsbereich, so kann man unter diesem Gesichtspunkt leicht mit dem Konvergenzbegriff arbeiten. Beachtet werden muss dann nur noch, dass der Grenzwert gleich dem Funktionswert an der Stelle x_0 sein muss, damit die Bedingungen der Stetigkeit erfüllt sind:

Sei $D \subseteq K$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt, f eine Funktion mit $f: D \to K$. f ist genau dann stetig in x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Der Beweis erfolgt leicht, denn die Aussage ist ja gerade so gebaut, dass der Konvergenzbegriff genutzt werden kann und die spezifischen Anforderungen der Stetigkeitsdefinition enthalten sind und umgekehrt. Da $f(x_0)$ definiert ist, da $x_0 \in D$, muss auch keine Unterscheidung bzgl. $x \in D \backslash \{x_0\}$ oder $x \in D$ getroffen werden, da $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ immer gilt.

c)

Begründung: Bei einem isolierten Punkt x_0 gibt es ein $\overline{\delta} > 0$, sodass in der $\overline{\delta}$ –Umgebung des isolierten Punktes keine weiteren Werte des Definitionsbereiches außer dem isolierten Punkt selbst liegen ($\forall x \in D \backslash \{x_0\}$ gilt $|x - x_0| > \overline{\delta}$)). Erinnern wir die Definition von Stetigkeit:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0: \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

---

[2] Erinnerung: x_0 heißt Häufungspunkt von D, falls in jeder ε-Umgebung von x_0 mindestens ein $x \in D, x \neq x_0$ liegt.

Wir wählen nun einfach $\delta = \overline{\delta}$ (bzw. $\delta < \overline{\delta}$ falls $\varepsilon < \overline{\delta}$), dann gilt nur für den isolierten Punkt x_0 selbst $|x - x_0| < \delta = \overline{\delta}$. Und für diesen gilt immer $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, denn $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ unabhängig von der Wahl von ε.

d)

Insgesamt ergibt sich damit folgende alternative Definition (hier direkt als Äquivalenz formuliert)[3].

Sei $D \subseteq K, x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to K$ ist genau dann stetig in x_0, wenn x_0 ein isolierter Punkt ist oder wenn x_0 ein Häufungspunkt ist und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

Umschreiben kann man das auch wie folgt: *Bei stetigen Funktionen sind die Bildung des Grenzwertes und das Bilden des Funktionswertes vertauschbar* bzw. es ist egal, ob erst abgebildet wird und dann der Grenzwert berechnet wird oder umgekehrt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$

Definition für Konvergenz über Folgen

a)

Konvergenz von Funktionen für x gegen x_0 über Folgen	Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0 über Konvergenz
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ hat für x gegen x_0 den Grenzwert a (auch $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$), wenn für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert und für die $x_n \neq x_0$ für alle $n \in N$ gilt, die Folge $(f(x_n))$ gegen a konvergiert.	Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in x_0, wenn x_0 ein isolierter Punkt ist oder wenn x_0 ein Häufungspunkt ist und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

Die Konvergenz einer Funktion wird hier über Folgen definiert und betrachtet wieder Häufungspunkte. Die Definition für Stetigkeit betrachtet wieder alle Elemente des Definitionsbereiches, unterscheidet dann aber zwischen Isolier- und Häufungspunkten. Bei Häufungspunkten wird dann mit der Konvergenz gearbeitet, welche durch die Konvergenzdefinition über Folgen noch einmal anders definiert wird.

Dieser Teil der Stetigkeitsdefinition kann also leicht mittels der Konvergenzdefinition über Folgen beschrieben werden, es ist zusätzlich nur wichtig, gegen welchen Wert die Folge konvergiert:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in x_0,

wenn x_0 ein isolierter Punkt ist oder

wenn x_0 ein Häufungspunkt ist und wenn für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert und für die $x_n \neq x_0$ für alle $n \in N$ gilt, die Folge $(f(x_n))$ gegen x_0 konvergiert. (d.h. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$)

b)

Die Konvergenzdefinition über Folgen wurde für Häufungspunkte formuliert und ist nicht direkt auf Isolierpunkte übertragbar. Denn für einen Isolierpunkt x_0 kann es keine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D geben, die gegen x_0, konvergiert, deren Folgenglieder aber alle ungleich x_0 sind – denn für Isolierpunkte gibt es ja gerade ein

[3] Unsere Konstruktion ist ja genauso gebaut, man kann aber auch noch einmal einen formalen Beweis führen, der dann im Groben wie folgt funktioniert: Aus isolierter Punkt folgt Stetigkeit wie bei der Herleitung gezeigt, aus Häufungspunkt mit Konvergenz gegen $f(x_0)$ folgt Stetigkeit, weil das mit der Definition dann direkt übereinstimmt. Umgekehrt kann bei einer in x_0 stetigen Funktion eine Fallunterscheidung getroffen werden: Ist x_0 isolierter Punkt ist man fertig. Ist x_0 Häufungspunkt, nutzt man die Gleichheit die hierfür hergestellte Übereinstimmung der Definitionen, um Konvergenz zu zeigen.

$\varepsilon > 0$, sodass zwischen x_0 und $x_0 + \varepsilon$ bzw. $x_0 - \varepsilon$ keine Punkte des Definitionsbereiches gibt, dort können also auch keine Folgenglieder ungleich x_0 liegen. Anders ausgedrückt kann man auch sagen, dass jede Folge, die gegen einen Isolierpunkt x_0 konvergiert, ab einem bestimmten Folgenlied immer gleich x_0 ist. Damit gilt ab einem gewissen Folgenglied aber auch $f(x_n) = f(x_0)$ und damit konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$. Für jeden isolierten Punkt x_0 gilt also automatisch: Konvergiert eine Folge x_n gegen x_0 ($x_n = x_0$ ist insbesondere zugelassen), dann konvergiert auch die Folge der Bilder $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$.

Was geschieht nun, wenn man die Forderung $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ fallen lässt, also nur fordert, dass für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert auch $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert und nicht zwischen Isolier- und Häufungspunkten unterscheidet? Eigentlich sollte sich dann eine Äquivalenz ergeben, denn die Bildwerte der Folgenglieder, die gleich x_0 sind, sind gleich $f(x_0)$, entsprechen also dem Grenzwert, gegen den die Bilder der Folge konvergieren sollen. Sie können also nicht der Grund für eine fehlende Konvergenz gegen $f(x_0)$ sein.

c)

1) $\Rightarrow$ 2): Ist x_0 ein Isolierpunkt, so ist wie oben beschrieben klar, dass jede gegen x_0 konvergente Folge x_n ab einem bestimmten Folgenglied gleich x_0 ist und daher konvergiert auch $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$. Ist x_0 ein Häufungspunkt, so ist nachzuweisen, dass aus der Eigenschaft in 1) die Eigenschaft in 2) folgt, wobei in 2) zusätzlich Folgen zugelassen sind, deren Folgenglieder (teilweise) gleich x_0 sind. Man nehme also eine Folge x_n, die gegen x_0 konvergiert (wobei insbesondere $x_n = x_0$ zugelassen ist). Dann sind entweder endlich viele Folgenglieder ungleich x_0 oder unendlich viele Folgenglieder ungleich x_0. Im ersten Fall könnte man also das größte Folgenglied, welches ungleich x_0 ist, bestimmen. Alle weiteren Folgenglieder wären dann gleich x_0 und da $f(x_n) = f(x_0)$, wenn $x_n = x_0$, konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$. Im zweiten Fall gibt es unendlich viele Folgenglieder ungleich x_0. Betrachten wir die Teilfolge x_{n_k}, deren Glieder nun alle ungleich x_0 sind und die weiterhin gegen x_0 konvergiert (da sie ja Teilfolge der konvergenten Folge ist). Dann konvergieren die Bilder der Folge nach 1) gegen $f(x_0)$ und da für die restlichen Folgenglieder $x_n = x_0$ gilt, folgt $f(x_n) = f(x_0)$ und damit ist $f(x_0)$ der Grenzwert der gesamten Folge.

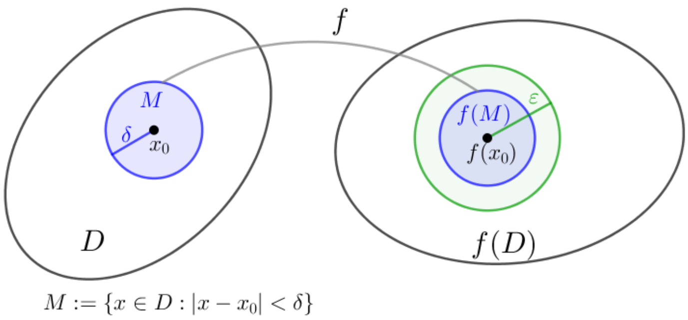
2) $\Rightarrow$ 1): Wir trennen für die Betrachtung in Isolier- und Häufungspunkte. Ist x_0 ein Isolierpunkt, so ist nichts zu zeigen, denn das ist die eine Möglichkeit in 1). Ist x_0 ein Häufungspunkt, so ist zu zeigen, dass aus der Eigenschaft von 2) die Eigenschaft von 1) für Häufungspunkte folgt. Nun gilt für jede Folge x_n, die gegen x_0 konvergiert nach 2) auch, dass $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert, also insbesondere auch für Folgen x_n, die gegen x_0 konvergieren mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

d)

Insgesamt gilt daher:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in x_0, wenn für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert, auch die Folge $(f(x_n))$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt. (Folgenstetigkeit)

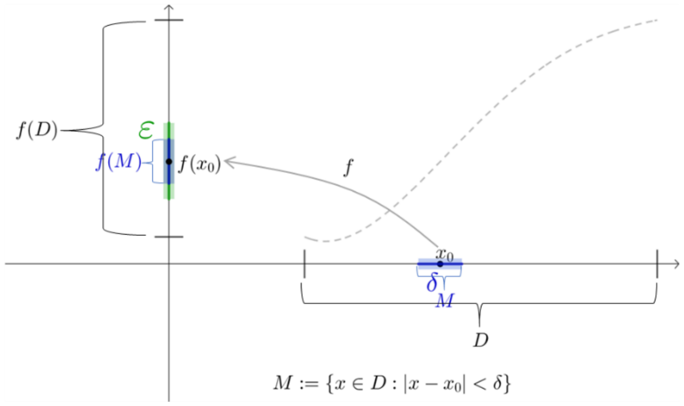
Zusatz: Äquivalenz von $\varepsilon - \delta$-Stetigkeit und Stetigkeitsdefinition über Folgen



Visualisierung Möglichkeit 1.

Die Äquivalenz zur $\varepsilon - \delta$-Definition kann man nun über die Äquivalenzen der beiden Konvergenzdefinitionen nachweisen. Man kann sich den Zusammenhang aber auch **mit Hilfe der Anschauung** verdeutlichen:

Wegen der Stetigkeit der Funktion findet man zu jeder ε-Umgebung zu $f(x_0)$ eine δ-Umgebung zu x_0, sodass die δ-Umgebung in die ε-Umgebung abgebildet wird. Man stellt sich nun eine Folge x_n in D vor, die gegen x_0 konvergiert und betrachtet die Bilder der Folgenglieder $f(x_n)$. Diese konvergieren gegen $f(x_0)$, da für jedes $\varepsilon > 0$ ein δ existiert, sodass alle Glieder der Folge x_n, die in der δ-Umgebung von x_0 liegen in die ε-Umgebung von $f(x_0)$ abgebildet werden (denn $f(M)$ ist Teil der ε-Umgebung). Weil x_n gegen x_0 konvergiert, liegen in jeder δ-Umgebung von x_0 alle Folgenglieder ab einem $n_\delta \in N$. Das bedeutet also: Ab einem $n_\delta \in \mathbb{N}$ liegen alle $f(x_n)$ mit $n \geq n_\delta$ innerhalb der ε-Umgebung von $f(x_0)$. Und das genau bedeutet, dass $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.



Visualisierung Möglichkeit 2.

Die umgekehrte Richtung überlegt man sich schnell mittels eines Widerspruches: Wir gehen also davon aus, dass für jede Folge x_n, die gegen x_0 konvergiert, $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert und die Funktion nicht stetig ist. Dann gibt es ein ε, sodass für alle δ ein $x \in D$ existiert, sodass x zwar in der δ-Umgebung von x_0 liegt, aber $f(x)$ außerhalb der ε-Umgebung von $f(x_0)$ liegt, also einen Abstand größer als ε von $f(x_0)$ hat. Da es für alle δ ein solches x_δ gibt, kann man sich dadurch eine Folge konstruieren, die gegen x_0 konvergiert, man lässt dazu δ einfach „immer kleiner werden" und „gegen 0 laufen". Sei also $\delta_n := \frac{1}{n}$. Dann existiert für jedes δ_n ein x_n mit $0 \leq |x_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Wegen $\delta_n \to 0$ und dem Sandwichkriterium gilt auch $x_n \to x_0$, gleichzeitig aber sind die Bilder der Folge immer mindestens ε von $f(x_0)$ entfernt, konvergieren also nicht gegen $f(x_0)$, was aber der Voraussetzung widerspricht. Damit muss f stetig in x_0 sein.

e)

Fassen Sie die Erkenntnisse dieses Teilkapitels zusammen, indem Sie alle äquivalenten Definitionen für Stetigkeit noch einmal ausformulieren:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

($\varepsilon - \delta$-Definition)
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(Konvergenzdefinition)
x_0 ist ein Isolierpunkt oder x_0 ist ein Häufungspunkt und $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(Folgendefinition)
Für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert, konvergiert die Folge $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$.

f) Es gibt natürlich verschiedene Möglichkeiten:

- „Stetige Funktionen sind genau die, die Grenzprozesse beim Abbilden erhalten."
- „Stetige Funktionen sind genau die, bei denen es egal ist, ob man zuerst abbildet und dann den Grenzwertprozess betrachtet oder umgekehrt."
- „Bei stetigen Funktionen darf der Limes in die Funktion gezogen werden."
- „Bei stetigen Funktionen gilt: Nähert man x an $x_0$an, so nähert sich $f(x)$ auch $f(x_0)$."
-

8) Arten von Unstetigkeit

- Der Grenzwert existiert ($\lim_{x\to 4} f_1(x) = 2$), stimmt aber nicht mit $f(4) = 3$ überein.
- Grenzwert ($\lim_{x\to 0} f_2(x)$) existiert nicht, bzw. präziser: Es existiert zwar ein rechts- und linksseitiger Grenzwert (1 und -1), diese stimmen aber nicht überein.
- Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f_3(x)$ existiert nicht.

9) Stetigkeit und Unstetigkeit nachweisen

	Stetigkeit nachweisen	**Unstetigkeit nachweisen**
$\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$-Definition	Man muss zeigen, dass es zu jedem beliebigen ε ein δ gibt, sodass für alle x im Definitionsbereich, die $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ erfüllen, auch $\lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$ gilt. Konkret bedeutet das meist: Man lässt $\varepsilon > 0$ beliebig und sucht in Abhängigkeit von ε und x_0 ein $\delta > 0$, dass die genannte Eigenschaft erfüllt.	Man muss zeigen, dass es ein ε gibt, sodass - egal welches δ man nimmt - es stets ein $x \in D$ gibt mit $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$, aber $\lvert f(x) - f(x_0) \rvert > \varepsilon$. Konkret bedeutet das: Man sucht und definiert ein $\varepsilon > 0$ und lässt $\delta > 0$ beliebig und sucht dann $x \in D$ (in Abhängigkeit von δ), sodass x in der δ-Umgebung um x_0 liegt, aber nicht in der ε-Umgebung um $f(x_0)$.
Definition über Konvergenz	Man muss zeigen, dass der Grenzwert der Funktion existiert und gleich dem Funktionswert ist. *Man kann also die Grenzwertsätze nutzen, um Stetigkeit nachzuweisen.*	Man muss zeigen, dass der Grenzwert der Funktion nicht existiert oder nicht gleich dem Funktionswert ist.
Definition über Folgen	Man muss zeigen, dass für jede Folge$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert, die Funktionswerte der Folge gegen $f(x_0)$ konvergieren. *Man kann also die Grenzwertsätze für Folgen nutzen, um Stetigkeit nachzuweisen.*	Man findet eine Folge, Folge$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert, deren Funktionswerte aber nicht konvergieren oder nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren. *Es genügt also, <u>eine einzige</u> gegen x_0 konvergierende Folge, deren Bilder nicht oder nicht gegen den Funktionswert des Grenzwertes konvergieren, um Unstetigkeit nachzuweisen. Man muss also „nur" ein Gegenbeispiel erzeugen.*

Stetigkeit mit Hilfe von Verknüpfungen

a) Beispielhaft ist hier der Beweis für die Addition stetiger Funktionen angeführt, einmal über Funktionen, einmal über Folgen:

Zu zeigen ist: Sei $D \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$. Sind $f: D \to \mathbb{R}$ und $g: D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen in $x_0 \in D$, so sind $f + g$ stetig in x_0 (wobei $f + g$ bedeutet: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$).

- Funktionen: Ist x_0 ein Isolierpunkt, so braucht man nichts weiter tun, dann ist $f + g$ in x_0 schon stetig. Ist x_0 ein Häufungspunkt, so muss man prüfen, ob $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = (f + g)(x_0)$ gilt.
  Da f und g stetig auf ganz D sind, gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ sowie $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.
  Da beide Funktionen dadurch insbesondere konvergieren, konvergiert auch die Summe der Funktionen und zwar gegen die Summe der Grenzwerte:
  $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$
  Damit ist $(f + g)$ stetig auf ganz D.
- Folgen: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D$ eine Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Zu zeigen ist nun: $\lim\limits_{n \to \infty} (f + g)(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) + g(x_n) = (f + g)(x_0)$. Da f und g stetig auf ganz D, gilt für jede Folge, die gegen x_0 konvergiert, dass die Bilder der Folge gegen die Bilder von x_0 konvergieren, also: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ und $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = g(x_0)$. Da $f(x_n)$ und $g(x_n)$ dadurch insbesondere konvergieren, konvergiert auch die Summe der Folgen und zwar gegen die Summe der Grenzwerte:
  $\lim\limits_{n \to \infty} (f + g)(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) + g(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) + \lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$

b) Zu zeigen: $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{4 \cdot |x|^3 + x}{x}$ ist stetig auf dem Definitionsbereich.
Sei $x_0 \in D$, das heißt insbesondere $x_0 \neq 0$.
Setze: $g(x) = 4 \cdot |x|^3 + x$ und $h(x) = x$.
Wegen $x_0 \neq 0$ ist auch $h(x_0) \neq 0$ und damit wäre $\frac{g}{h}$ stetig in x_0 (wegen Division zweier stetiger Funktionen), wenn g stetig ist x_0.
Es bleibt also zu zeigen, dass g stetig in x_0:
   - $|x|$ ist stetig in x_0, da x stetig in x_0 und die Betragsbildung stetiger Funktionen stetig ist,
   - $|x|^3 = |x| \cdot |x| \cdot |x|$ ist stetig in x_0, da $|x|$ stetig in x_0 und die Multiplikation stetiger Funktionen stetig ist,
   - $4 \cdot |x|^3$ ist stetig in x_0, da $|x|^3$ stetig in x_0 und die Vervielfachung stetiger Funktionen stetig ist,
   - $4 \cdot |x|^3 + x$ ist stetig in x_0, da $4 \cdot |x|^3$ und x stetig in x_0 sind und die Addition stetiger Funktionen stetig ist.

10) Verbundene Aspekte

a) Durchsuchen Sie Ihre Vorlesungsunterlagen (Skript, Übungsblätter) nach Sätzen oder Definitionen, die mit Stetigkeit in Verbindung stehen und notieren Sie diese (entweder vollständig oder durch Schlagworte).

b) Betrachten Sie die Definitionen oder Sätze, von denen Sie nicht sicher sind, was sie bedeuten, noch einmal genauer. Suchen Sie ggf. Beispiele und Gegenbeispiele.

c) Ordnen Sie alle Aspekte für sich.[4] Dafür könnten folgende Fragen hilfreich sein:
   a. Gibt es einen logischen Zusammenhang (bspw. was folgt aus was)?
   b. Gibt es ein markantes Beispiel dafür, dass eine bestimmte Beziehung nicht gilt?
   c. Welche Begriffe oder Sätze sind einander ähnlich?

Lösung:

a) Lokale Stetigkeit (verschiedene Definitionen), Gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit, Zwischenwertsatz, Nullstellensatz, Intervalle auf Intervalle, Annahme von Minimum & Maximum, Beschränktheit, Zusammenhang mit Umkehrfunktion, stetige Funktionen auf kompakten Intervallen sind gleichmäßig stetig

b) In dieser Teilaufgabe geht es beispielsweise darum, noch einmal genau die Aussage und die Voraussetzung von Sätzen zu prüfen und Beispiele zu rekapitulieren.

   Beispielsweise: Was genau sind die Voraussetzungen beim Zwischenwertsatz? Ist der Zwischenwertsatz eine Implikation oder eine Äquivalenz? Es ist eine Implikation, die Umkehrung (Zwischenwerteigenschaft auf kompaktem Intervall → stetig) gilt nicht, ein mögliches Gegenbeispiel ist $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Die Funktion ist nicht stetig auf $[-1,1]$ und erfüllt trotzdem die Zwischenwerteigenschaft.

c) Hier geht es darum, dass Sie die verschiedenen Aspekte in irgendeiner Form für sich genauer ordnen und sich einen systematischen Überblick über das Themengebiet verschaffen. Es gibt daher keine Musterlösung.
   Sie könnten aber beispielsweise die Menge der Lipschitzstetigen Funktionen als Teilmenge der gleichmäßig stetigen und dieser wieder als Teilmenge der stetigen Funktionen darstellen. Oder aber Sie könnten diese Beziehung durch Pfeile darstellen:

Für eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ gilt der folgende Zusammenhang:

$$\boxed{f \text{ Lipschitz-stetig auf } D} \Rightarrow \boxed{f \text{ gleichmäßig stetig auf } D} \underset{\Leftarrow}{\overset{\Rightarrow}{\scriptstyle \text{Wenn } D = [a,b]}} \boxed{f \text{ stetig auf } D}$$

---

[4] Auch hier gibt es keine per se „richtige“ und „falsche“ Ordnung, wichtig ist, dass Sie die Aspekte „für sich“ strukturieren.

Stetigkeit

Teil 3

11) Verallgemeinerungen

Vermutete Definition: Sei $D \subseteq M$ und $x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to N$ heißt stetig in x_0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$\text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0|_M < \delta \text{ gilt: } |f(x) - f(x_0)|_N < \varepsilon.$$

Stetigkeit und Unstetigkeit mit Hilfe der Definitionen nachweisen - Beispiele

Stetigkeit nachweisen (Konvergenzdefinition)

In einigen Fällen kann man sehr gut die Grenzwertsätze nutzen, um die Stetigkeit einer Funktion zu überprüfen. Man bildet dazu den Grenzwert und gleicht diesen mit dem Funktionswert an der Stelle ab.

Beispiel 1: Die Stetigkeit der Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

auf ihrem Definitionsbereich soll nachgewiesen werden.

1) Wir bilden den Grenzwert (unter Ausnutzung der Grenzwertsätze):
   Für $x \neq 1$ gilt: $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x + 1$.
   Also: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to x_0} (x+1) = x_0 + 1$.
2) Für $x_0 \neq 1$ gilt: $f(x_0) = \frac{x_0^2-1}{x_0-1} = x_0 + 1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
   Für $x_0 = 1$ gilt: $f(x_0) = 2 = 1 + 1 = x_0 + 1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
   Damit gilt für alle Elemente des Definitionsbereiches: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ und die Funktion ist stetig auf dem gesamten Definitionsbereich.

Skizze zur Beweisfindung:

1) Bestimmung von $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ mit Hilfe der Grenzwertsätze*. (das ist die „Hauptschwierigkeit")
2) Bestimmung von $f(x_0)$ und Aufzeigen der Gleichheit durch Vergleich von $f(x_0)$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

*Hilfreich sind: Existieren $\lim\limits_{x - x_0} f(x) =: F$ und $\lim\limits_{x - x_0} g(x) =: G$, so gilt auch

$\lim\limits_{x - x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = F + G$,

$\lim\limits_{x - x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = F \cdot G$,

$\lim\limits_{x - x_0} |f(x)| = |F|$, $\lim\limits_{x - x_0} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot F$

sowie $\lim\limits_{x - x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$, sofern $g(x)$ nicht gegen Null konvergiert.

Anmerkung: Damit ist auch klar, dass die Funktion in $x_0 = 1$ immer unstetig wäre, wenn $f(x_0) = f(1) \neq 2$ gelten würde.

Beispiel 2: Die Stetigkeit der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 8 \cdot |x^2 + 4| + 6$ auf ihrem Definitionsbereich soll nachgewiesen werden. Wir bilden wieder den Grenzwert unter Ausnutzung der Grenzwertsätze:

$$\lim_{x \to x_0} (8 \cdot |x^2 + 4| + 6) = 6 + 8 \cdot \lim_{x \to x_0} (|x^2 + 4|) = 6 + 8 \cdot \left| \lim_{x \to x_0} (x^2 + 4) \right| = 6 + 8 \cdot \left| \lim_{x \to x_0} (x^2) + 4 \right| = 6 + 8 \cdot \left| \left(\lim_{x \to x_0} x \right)^2 + 4 \right| = 6 + 8 \cdot |x_0^2 + 4| = f(x_0).$$

Aufgabe 1: *Weisen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze nach, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$ auf ihrem Definitionsbereich stetig ist.*

Stetigkeit nachweisen ($\varepsilon - \delta$-Definition)

Um Stetigkeit mit der $\varepsilon - \delta$-Defintion nachzuweisen, muss gezeigt werden, dass die definierende Eigenschaft zutrifft.

Man wählt also $\varepsilon > 0$ beliebig. Nun versucht man, meist in Abhängigkeit von ε und x_0, ein $\delta > 0$ zu finden, sodass man $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ aus $|x - x_0| < \delta$ folgern kann (denn die Ungleichung $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ soll ja nur für die $x \in D$ gelten, die $|x - x_0| < \delta$ erfüllen). Insgesamt möchte man eine Ungleichungskette in der folgenden Art entwickeln:

$$|f(x) - f(x_0)| < \cdots < \cdots < \cdots < \varepsilon$$

Man startet dabei ganz links bei einer Verknüpfung von Konstanten (wie Zahlen und x_0) mit der Variable x und muss durch Abschätzungen ε erlangen. Das Mittel, dass man dafür zur Verfügung hat, ist die Wahl von δ (meist wählt man δ kleiner oder gleich einer Verknüpfung aus ε und x_0). Hilfreich ist es also durch Termumformungen und Abschätzungen $|x - x_0|$ zu erzeugen, welches man durch δ abschätzen kann, wodurch man ε in die Ungleichung bekommt und das „x“ herausbekommt.

Skizze zur Beweisfindung:

1) Wenn bereits möglich: Aus anschaulichen (oder anderen) Gründen eine Abschätzung für δ (meist in Abhängigkeit von ε und x_0) treffen bzw. direkt mit 2) beginnen.
2) $|f(x) - f(x_0)|$ aufschreiben und versuchen, durch Umformungen und Abschätzungen $|x - x_0|$ zu erzeugen und x insgesamt aus der Gleichung „herauszuschätzen“. (durch Nutzung von $|x - x_0| < \delta$ bzw. $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*
3) Gibt es eine Abschätzung aus 1), dann weiter mit 4), sonst: Sind alle x aus der Ungleichung „verschwunden“, dann den Term der letzten Abschätzung gleich ε setzen und nach δ auflösen. Daraus die Abschätzung für δ gewinnen.
4) Abschätzung für δ in der Ungleichung nutzen und prüfen, dass man am Ende $\leq \varepsilon$ erhält.

* Es kann vorkommen, dass man vielleicht „zu grob“ abschätzt und das am Ende auch durch die Wahl des δ nicht mehr korrigieren kann (bspw. bei $\delta + 1 \leq \varepsilon$). Dann kann man diese Abschätzung so nicht nutzen.

Präziser ist es also das Ziel, eine Ungleichungskette folgender Art zu erzeugen:

$$|f(x) - f(x_0)| < \cdots < (\dots)|x - x_0| < (\dots)\delta < \cdots < \varepsilon$$

Die Kernfrage ist immer, wie man ein solches δ findet. Hierfür gibt es kaum eine allgemeine Lösungsformel. Neben *algebraischen Umformungen und Abschätzungen*, die vielleicht einen Ansatz liefern können, ist es manchmal auch hilfreich, sich (zumindest in der Vorstellung) ein *„Bild“ von der Funktion* zu machen.

Beispiel 1 (über einen algebraischen Ansatz):

Wir möchten zeigen, dass $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ stetig ist auf ihrem Definitionsbereich. Wir zeigen hier gleich allgemein die Stetigkeit für ein beliebiges x_0.

Sei also $x_0 \in D = \mathbb{R}$.

Sei $\varepsilon > 0$.

Nun suchen wir ein δ, um eine Ungleichungskette folgender Art zu erzeugen:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| < \cdots < (\dots)|x - x_0| < (\dots)\delta < \cdots < \varepsilon$$

Nützliche algebraische „Werkzeuge“:

- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (durch quadratische Ergänzung auch herstellbar)
- $a^2 + b^2 \leq (a + b)^2$ (für $a \geq 0, b \geq 0$)
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)
- $\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ (Erweiterung Dreiecksungleichung)
- $|a| = \sqrt{a^2}$
- $\frac{1}{|a|} \leq \frac{1}{|b|}$ wenn $|b| \leq |a|$ (Nenner verkleinern, um Bruch zu vergrößern).
- $|x - x_0| < \delta$ bedeutet $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bzw. $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

Wir könnten uns hier nun erst einmal 1) widmen und aus anschaulichen oder anderen Gründen eine Abschätzung suchen, dies soll aber ein Beispiel für einen rein algebraischen Ansatz sein, daher starte wir mit 2):

2) Wir führen Termumformungen durch, um $|x - x_0|$ zu erzeugen, was in diesem Fall über die binomischen Formeln recht leicht ist:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|x^2 - x_0^2\right| = |x - x_0| \cdot |x + x_0|$$

Nun können wir bereits die Abschätzung $|x - x_0| < \delta$ nutzen und tun an dieser Stelle so, als würden wir δ schon kennen. Wir sehen dann, was sich daraus ergibt und schließen auf δ zurück.

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq \delta \cdot |x + x_0|$$

Nun haben wir noch den Term $|x + x_0|$ übrig. Auch hier erzeugen wir wieder $|x - x_0|$ durch Addition einer „0“:

$$\left|x^2 - x_0^2\right| \leq \delta \cdot |x + x_0| = \delta \cdot |x - x_0 + x_0 + x_0| = \delta \cdot |(x - x_0) + 2x_0|$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$$\left|x^2 - x_0^2\right| \leq \delta \cdot |x + x_0| = \delta \cdot |(x - x_0) + 2x_0| \leq \delta \cdot (|x - x_0| + 2|x_0|)$$

Wir haben erneut ein $|x - x_0|$ erzeugt und können nun weiter abschätzen:

$$\left|x^2 - x_0^2\right| \leq \delta \cdot |x + x_0| \leq \delta \cdot (|x - x_0| + 2|x_0|) \leq \delta \cdot (\delta + 2|x_0|) = \delta^2 + 2\delta|x_0| \quad (*)$$

3) Nun haben wir einen Term, der nur noch von Konstanten (2 und $|x_0|$) abhängt und von δ, welches wir ja noch setzen dürfen. Es soll also gelten:

$$\delta^2 + 2\delta|x_0| \leq \varepsilon$$

Wir überlegen uns zunächst für welches positive $\tilde{\delta}$ Gleichheit gilt, was dem Lösen einer quadratischen Gleichung entspricht: $\tilde{\delta}^2 + 2\tilde{\delta}|x_0| - \varepsilon = 0$. Dies ist für $\tilde{\delta} = -|x_0| \pm \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2}$ der Fall. Das negative Ergebnis entfällt, da δ und $\tilde{\delta}$ positiv sein sollen. Wählt man $\delta \leq \tilde{\delta}$, so ist die Ungleichung weiter erfüllt, da nur positive Werte miteinander verknüpft werden. Folglich sollte man δ wir folgt wählen: $0 < \delta \leq \tilde{\delta} = -|x_0| + \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2}$.

4) Damit führen wir auch die obige Ungleichung zum Ziel:

$$\begin{aligned}\left|x^2 - x_0^2\right| &\leq \delta \cdot |x + x_0| \leq \delta \cdot (|x - x_0| + 2|x_0|) \leq \delta^2 + 2\delta|x_0| \\ &\leq \left(-|x_0| + \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-|x_0| + \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2}\right) \cdot |x_0| \\ &= |x_0|^2 - 2 \cdot |x_0| \cdot \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2} + (\varepsilon + |x_0|^2) - 2|x_0|^2 + 2 \cdot |x_0| \cdot \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Auf diese Weise ergeben sich am Ende zwar lange Terme, diese sollten sich am Ende aber auflösen, da δ ja genau so gewählt ist.

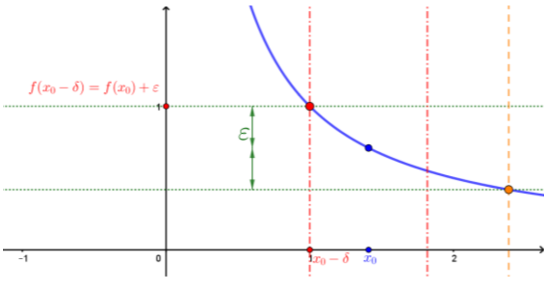
Anmerkung: Oft beginnt ein Stetigkeitsnachweis über die $\varepsilon - \delta$-Definition mit „Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$.“ und es folgt eine Ungleichungskette, die direkt zur Lösung führt. Startet man mit einer (bspw. aus der Anschauung heraus) begründeten Überlegung zu δ, entspricht das auch dem Denkprozess. Versucht man aber durch algebraische Umformungen eine Idee für ein passendes δ zu bekommen, so verläuft der Denkprozess mitunter genau anders herum. Man startet dann mit der Ungleichungskette und überlegt sich darauf basieren ein geeignetes δ.

Beispiel 2 (über einen anschaulichen Ansatz):

Wir möchten zeigen, dass $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ stetig ist auf $\mathbb{R}^+$. Wir zeigen hier gleich Allgemein die Stetigkeit für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

Sei also $x_0 \in D = \mathbb{R}^+$.

1) Hat man ein gutes „Bild" von $f(x) = \frac{1}{x}$, so „weiß" man, dass $f(x)$ monoton fallend ist für $x \in \mathbb{R}^+$. Hält man nun ein x_0 fest, so erkennt man auch, dass man für ein beliebiges ε das δ immer in Abhängigkeit von der Abweichung nach „links" suchen muss, da man hier den kritischen Bereich „zuerst" verlässt (was damit zusammenhängt, dass die betragsmäßige Steigung der Funktion „links" von x_0 immer größer ist als „rechts").[1]



Wir suchen also ein δ, sodass der $f(x_0 - \delta)$ um maximal ε von $f(x_0)$ „nach oben" abweicht, wobei $\delta < x_0$ gelten muss, sonst liegt $x_0 - \delta$ nicht im Definitionsbereich. Die Frage ist also: Für welches $\tilde{\delta}$ gilt: $f\left(x_0 - \tilde{\delta}\right) = f(x_0) + \varepsilon$? Was gleichbedeutend ist mit:

$$\frac{1}{x_0 - \tilde{\delta}} = \frac{1}{x_0} + \varepsilon$$

Auflösen der Gleichung nach $\tilde{\delta}$ ergibt: $\tilde{\delta} \leq \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{1+\varepsilon \cdot x_0}$, da immer gilt $\frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{1+\varepsilon \cdot x_0} = \frac{\varepsilon \cdot x_0}{1+\varepsilon \cdot x_0} \cdot x_0 \leq 1 \cdot x_0 = x_0$, ist dieses die stärkere Einschränkung von δ. Wir wählen also: $\delta \leq \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{1+\varepsilon \cdot x_0}$

2) +4) Damit können wir die folgende Ungleichung aufstellen:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}\right| \leq \frac{\delta}{|x| \cdot |x_0|} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{|x_0 - \delta| \cdot |x_0|} \cdot \delta \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{x_0 - \dfrac{\varepsilon \cdot x_0^2}{1 + \varepsilon \cdot x_0}} \cdot \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{1 + \varepsilon \cdot x_0}$$

$$= \frac{\varepsilon \cdot x_0 \cdot (1 + \varepsilon \cdot x_0)}{(x_0 + \varepsilon \cdot x_0^2 - \varepsilon \cdot x_0^2) \cdot (1 + \varepsilon \cdot x_0)} = \varepsilon$$

(*): Diese Abschätzungen sind möglich, weil $x_0 > 0$ und $\delta < x_0$, womit auch $|x_0 - \delta| = x_0 - \delta > 0$ ist und ebenso $|x| = x > x_0 - \delta > 0$. Sowie $x_0 - \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{1+\varepsilon \cdot x_0} \geq x_0 - \delta > 0$

Aufgabe 2: *Weisen Sie die Stetigkeit der Funktion*

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 2|$

an der Stelle $x_0 = 1$ *nach.*

[1] Diese Argumentation ist rein anschaulicher Natur. Natürlich könnte man das auch alles zeigen, das ist in diesem Fall aber gar nicht notwendig, da es ja „nur" um die Entwicklung einer Idee für die Abschätzung von δ geht, die nicht sauber ausformuliert sein muss. Ist unsere Vorstellung nicht richtig oder nicht exakt genug, dann funktioniert der auf dieser Idee basierende Beweis später vielleicht einfach nicht.

Unstetigkeit nachweisen ($\varepsilon - \delta$-Definition)

Um mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$-Kriteriums Unstetigkeit nachzuweisen, muss man zeigen, dass das Kriterium verletzt ist, was bedeutet, dass es mindestens ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass man <u>kein</u> $\delta > 0$ findet, bei dem für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Mit anderen Worten: Es gibt mindestens ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $\delta > 0$ gilt: Es gibt mindestens ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, für das $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$ gilt.

Skizze zur Beweisfindung:

1) Wenn bereits möglich: Bspw. aus anschaulichen Gründen ein ε festlegen.
2) $\delta > 0$ beliebig lassen und ein $\tilde{x}$ (meist in Abhängigkeit von δ) suchen, für das $|x - x_0| < \delta$ aber $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$ gilt.

<u>Zielstellung:</u> Man muss also ein $\varepsilon > 0$ finden, bei dem man unabhängig vom δ immer ein Element innerhalb der δ-Umgebung von x_0 findet, welches aus dem kritischen Bereich herausreicht.

Ein solcher Beweis eignet sich besonders gut, wenn man durch das „Bild" der Funktion bereits eine Idee für ein solches ε hat.

Beispiel: Zu zeigen ist, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ unstetig ist in $x_0 = 0$.

1) Aufgrund des „Bildes" der Funktion (machen Sie sich kurz eine Skizze) kann man schon erkennen, dass die Funktion bei $x_0 = 0$ von „-1" auf „1" „springt". Sobald ε also echt kleiner wird als 2, ist es egal, wie klein man δ wählt, man hat für jede δ-Umgebung um $x_0 = 0$ sofort Elemente enthalten, die echt kleiner sind als 0 und deren Funktionswert daher „-1" ist, was außerhalb der ε-Umgebung um $f(x_0) = 1$ liegt.

   Genau das ist auch die Beweisidee:

   Man wählt $\varepsilon < 2$, also zum Beispiel $\varepsilon = 1$.

2) Sei nun $\delta > 0$ beliebig. Wir finden nun auf jeden Fall Elemente, die innerhalb der δ-Umgebung um x_0 liegen und gleichzeitig außerhalb der ε-Umgebung – nämlich genau alle Werte, für die gilt:

   $x_0 - \delta < \bar{x} < 0$, wegen $x_0 = 0$ bedeutet das: $-\delta < \bar{x} < 0$

   Sei also $\bar{x} \in (-\delta, 0)$ (Alternativ könnte man auch $\bar{x} = -\frac{\delta}{2}$ setzen) . Dann gilt einerseits:
   $|\bar{x} - x_0| = |\bar{x} - 0| = |\bar{x}| < \delta$

   Gleichzeitig ist $\bar{x} < 0$ und damit $f(\bar{x}) = -1$. Damit gilt:

   $|f(\bar{x}) - f(x_0)| = |-1 - 1| = 2 > 1 = \varepsilon$

   Wir haben also unabhängig von δ Elemente ($\bar{x}$) gefunden, die innerhalb der δ-Umgebung um x_0 liegen, aber nicht innerhalb der ε-Umgebung um $f(x_0)$.

Aufgabe 3: *Weisen Sie die Unstetigkeit der folgenden Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ mit Hilfe der $\varepsilon - \delta$-Definition nach:*

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3 & , x \neq 2 \\ 6 & , x = 2 \end{cases}$$

Unstetigkeit nachweisen (Folgendefinition)

Die Definition von Stetigkeit über Folgen, die eng mit der über Konvergenz von Funktionen zusammenhängt, hat hier den Vorteil, dass man nur eine *einzige* Folge finden muss, deren Funktionswerte nicht konvergieren oder nicht gegen den Funktionswert des Grenzwertes konvergieren, um Unstetigkeit nachzuweisen.

Skizze zur Beweisfindung:

1) Bspw. aus „anschaulichen" Gründen eine Folge suchen, deren Funktionswerte nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren bzw. nicht konvergieren. (Sich dazu „gedanklich" von einer Seite auf x_0 zubewegen und schauen, inwiefern man Funktionswerte finden kann, die sich nicht auf $f(x_0)$ zubewegen.)
2) Prüfen bzw. nachweisen, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ nicht existiert oder aber $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$.

Beispiel: Die Unstetigkeit von $f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_4(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & sonst \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ in $x_0 = 0$ soll nachgewiesen werden.

1) Aus anschaulichen Betrachtungen wissen wir schon, dass die Funktion „immer schneller zwischen -1 und 1 hin und her schwenkt, je näher man der 0 kommt". Da sich diese Amplitude auch nicht verkleinert, findet man für $\varepsilon < 1$ auch für jede noch zu kleine δ-Umgebung um $x_0 = 0$ wieder Werte, die die Amplitude annehmen und daher aus der ε-Umgebung um $f(x_0) = 0$ herausfallen. (An dieser Stelle könnte man auch gut einen Nachweis mit $\varepsilon - \delta$-Kriterium führen, wir schauen aber hier auf das Folgenkriterium).

   Ziel ist es nun, eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu finden, für die $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = 0$ gilt und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0) = 0$.

   Aus dem „Bild" der Funktion ist ersichtlich, dass eine Folge, deren Funktionswerte immer auf dem höchsten Ausschlag der Funktion „sitzen", diese Bedingungen erfüllt, denn die Funktionswerte sind dann konstant 1 und konvergieren damit gegen 1 und die Werte der Folge laufen „anschaulich gesehen" gegen „0" (was wir aber noch zeigen müssen, sobald wir die Folge definiert haben).

   Wir suchen also eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1$ für alle Folgenglieder gilt. Dazu nutzen wir unsere Kenntnisse über die „normale" Sinusfunktion ($\sin(x)$). Über den Graphen der Sinusfunktion oder den Einheitskreis können wir rekonstruieren , dass $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ gilt. Ebenso hilft uns die Periode der Sinusfunktion, diese besagt nämlich: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1, k \in \mathbb{Z}$. Wir wissen nun also, dass für die Folge $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ gilt: $\sin(y_n) = 1$ für alle Folgenglieder. Nun suchen wir aber $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1$ für alle Folgenglieder. Wir suchen also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\frac{1}{x_n} = y_n$, also: $x_n = \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$

   Für diese Folge gilt: $f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ und damit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

2) Gleichzeitig ist $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n} = 0$

   (Begründung: Sandwichkriterium und $0 \leq \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n} \leq \frac{1}{n}$).

   Folglich ist $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = f(0)$. Man hat also eine Folge gefunden, die gegen x_0 konvergiert, deren Funktionswerte aber nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren.

Anmerkung: Wir sind hier tendenziell so vorgegangen, dass wir eine Folge gesucht haben, deren Funktionswerte nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren. Dass die Folge gegen x_0 konvergiert haben wir im Anschluss gezeigt und uns zunächst auf die Anschauung verlassen, dass das so sein könnte, weil wir uns gedanklich auf x_0 zubewegt haben. Diese Form des Unstetigkeitsnachweises kann sehr charmant sein, da man nur eine einzige konvergente Folge benötigt, deren Bilder nicht oder nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren, bei allen anderen Folgen könnte das ja weiterhin der Fall sein.

Aufgabe 4:

Weisen Sie die Unstetigkeit der beiden Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ nach:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} cos\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0 \\ 0, \qquad x = 0 \end{cases}$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{2x-4}{x}, x \neq 0 \\ 0, \qquad x = 0 \end{cases}$

<u>***Lösungen zu den Aufgaben***</u>

Aufgabe 1: *Weisen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze nach, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$ auf ihrem Definitionsbereich stetig ist.*

Mit den Grenzwertsätzen gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 + x = \lim\limits_{x \to x_0} x^2 + \lim\limits_{x \to x_0} x = \left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)^2 + \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0^2 + x_0$. Damit gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0^2 + x_0 = f(x_0)$.

Aufgabe 2: *Weisen Sie die Stetigkeit der Funktion*

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 2|$

an der Stelle $x_0 = 1$ nach.

Algebraischer Ansatz:

$$|f(x) - f(1)| = \big||x^2 - 2| - |-1|\big| \underbrace{\leq}_{Dreiecksungleichung} |x^2 - 2 + 1| = |x^2 - 1| = |x - 1| \cdot |x + 1|$$

Da ja $|x - 1| < \delta$ gelten soll folgt:

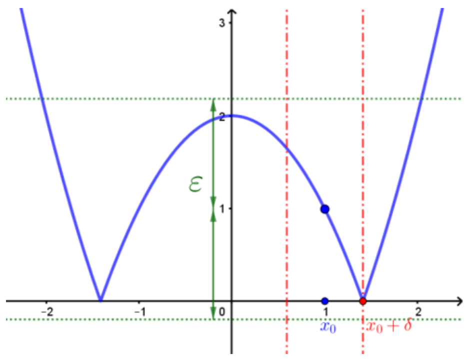
$$|f(x) - f(1)| = \cdots = |x - 1| \cdot |x + 1| < \delta \cdot |x - 1 + 2| \leq \delta \cdot (|x - 1| + 2) < \delta(\delta + 2)$$

Das soll nun kleiner ε sein. Das ist der Fall, wenn δ kleiner ist als die Lösung der Gleichung: $\delta^2 + 2\delta - \varepsilon = 0$. Also mit der pq-Formel folgt: $\delta < \sqrt{1 + \varepsilon} - 1$.

$$|f(x) - f(1)| = \cdots < \delta(\delta + 2) < \left(\sqrt{1+\varepsilon} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1+\varepsilon} - 1 + 2\right) = \left(\left(\sqrt{1+\varepsilon}\right)^2 - 1\right) = 1 + \varepsilon - 1 = \varepsilon$$

Ansatz mittels Anschauung:

Bei der Funktion handelt es sich um eine verschobene Normalparabel, die im Bereich $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ an der x-Achse gespiegelt ist.



$x_0 = 1$ liegt in diesem „gespiegelten" Bereich.

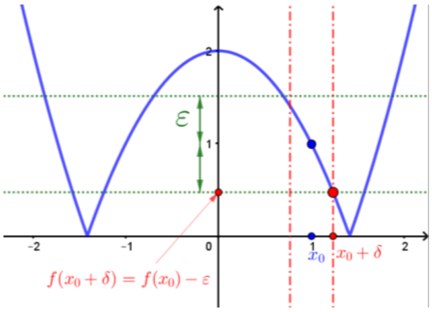
Ist nun $\varepsilon > 1$, so kann man einfach den Schnittpunkt mit der x-Achse für die Berechnung von δ nehmen: Dabei ist $f(x) = 0$, wenn $x = \pm\sqrt{2}$, wobei an dieser Stelle nur $\sqrt{2}$ von Interesse ist.

Man wähle für δ dann also: $\delta = \sqrt{2} - 1$

Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - 1| < \delta$:

$$|f(x) - f(1)| = \big||x^2 - 2| - |1 - 2|\big| \underbrace{\leq}_{Dreiecksungleichung} |x^2 - 2 + 1| = |x^2 - 1| = |x - 1| \cdot |x + 1|$$
$$< \delta|x - 1 + 2| \leq \delta(|x - 1| + 2) < \delta(\delta + 2) = \left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} - 1 + 2\right) = 2 - 1 = 1$$
$$< \varepsilon$$

Betrachten wir nun $\varepsilon \leq 1$. Da die betragsmäßige Steigung der Parabel mit der Entfernung zu 0 zunimmt, erreicht man „rechts“ von 1 schneller die kritische Grenze als links.



Man sucht also ein $\delta > 0$, sodass: $f(1+\delta) = |(1+\delta)^2 - 2| = 1 - \varepsilon$

Dabei können wir vorab schon $\delta \leq \sqrt{2} - 1$ setzen, da $\varepsilon \leq 1$ sein soll und sonst ggf. schon mit $\delta = \sqrt{2} - 1$ ein Problem entstehen kann.

Damit gilt: $|(1+\delta)^2 - 2| = 2 - (1+\delta)^2$. Wir suchen also ein $\delta \leq \sqrt{2} - 1$ sodass:

$(1+\delta)^2 = 1 + \varepsilon$ und damit $\delta < \sqrt{1+\varepsilon} - 1 \leq \sqrt{2} - 1$, da $\varepsilon \leq 1$.

Analog zu oben kann man dann schließen:

$$|f(x) - f(1)| = \left||x^2 - 2| - |1 - 2|\right| < \delta(\delta + 2) = \left(\sqrt{1+\varepsilon} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1+\varepsilon} - 1 + 2\right) = \left(\left(\sqrt{1+\varepsilon}\right)^2 - 1\right)$$
$$= 1 + \varepsilon - 1 = \varepsilon$$

Aufgabe 3:

Weisen Sie die Unstetigkeit der folgenden Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ mit Hilfe der $\varepsilon - \delta$-Definition nach:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 2 \\ 6, & x = 2 \end{cases}$$

Betrachtet man den Graphen der Funktion oder bildet $2^3 = 8$, so erkennt man, dass die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ vom erwarteten Verlauf abweicht. Sobald man mit der Wahl von ε in die „Lücke“ zwischen 6 und 8 „rutscht“, kann man für jedes δ sofort Elemente angeben, die außerhalb des gewünschten Bereiches liegen.

Sei also $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$. Man wähle: $x = 2 + \frac{\delta}{2}$

Dann gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\left(2 + \frac{2}{\delta}\right)^3 - 6\right|$$

Da $\left(2 + \frac{2}{\delta}\right)^3 > 2^3 > 6$, gilt $\left(2 + \frac{2}{\delta}\right)^3 - 6 > 0$, die Betragsstriche sind also überflüssig:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\left(2 + \frac{2}{\delta}\right)^3 - 6\right| = \left(2 + \frac{\delta}{2}\right)^3 - 6 > 2^3 - 6 = 8 - 6 = 2 > 1 = \varepsilon$$

Man hat also für jedes $\delta > 0$ ein x innerhalb der δ-Umgebung um x_0 gefunden, sodass $f(x)$ nicht innerhalb der ε-Umgebung von $f(x_0)$ liegt.

Aufgabe 4:

Weisen Sie die Unstetigkeit der beiden Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ nach:

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{2x-4}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

a) Hier kann man ganz ähnlich vorgehen wie im Musterbeispiel. Auch der Cosinus oszilliert immer schneller, wenn man sich auf $x_0 = 0$ zubewegt. Wir suchen also erneut die Stellen, an denen die 1 erreicht wird:
Es gilt: $\cos(2\pi n) = 1$, für $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.
Ziel ist es also, dass $\frac{1}{x_n} = 2\pi n$ gilt. Wir wählen also $x_n = \frac{1}{2\pi n}$.

Für diese Folge gilt: $f(x_n) = \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos(2\pi n) = 1$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

Gleichzeitig ist: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n} = 0$
(Begründung: Sandwichkriterium und $0 \leq \frac{1}{2\pi n} \leq \frac{1}{n}$).

Folglich ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = f(0)$. Man hat also eine Folge gefunden, die gegen $x_0 = 0$ konvergiert, deren Funktionswerte aber nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren.

b) Ein Blick auf den Funktionsgraph zeigt (zeichnen bzw. zeichnen lassen), dass die Bilder jeder Folge, die gegen $x_0 = 0$ konvergiert divergieren. Wir nehmen also $x_n = \frac{1}{n}$ als Folge, die gegen $x_0 = 0$ konvergiert und betrachten:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n - 4}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{n} - 4}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2 - 4n = \lim_{n\to\infty} (2 - 3n) - n < \lim_{n\to\infty} -n$$

Die Folge divergiert, denn für alle $c < 0$ gilt: $2 - 4n < c$, für $n_0 > n > \frac{2-c}{4}$. Wir haben daher eine Folge gefunden, die gegen x_0 konvergiert und deren Bilder nicht konvergieren.

Liebe Pilotierungs-Teilnehmer/innen,

dieser Auszug stammt aus einem Skript, in dem viele Konzepte zugleich in de reellen Zahlen und in den komplexen Zahlen behandelt werden. Sie müssen sich aber an dieser Stelle nur auf die reellen Zahlen konzentrieren, sodass Sie anstelle von K immer R einsetzen und denken können.

18. Stetigkeit

Wir kommen nun zu einem fundamentalen Begriff der Analysis, der Stetigkeit. Flapsig gesprochen, bedeutet Stetigkeit, dass ein kleines Wackeln an der Variablen den Funktionswert einer Funktion auch nur wenig verändert, d. h. kleine Störungen haben auch nur kleine Wirkungen. Damit ist Stetigkeit, zumeist unbemerkt, eine häufige Grundannahme unseres Lebens.
Streng mathematisch formuliert liest sich das so:

Definition 18.1. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $x_0 \in D$. Eine Funkion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt* stetig in x_0, *wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ gibt, so dass*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \textit{für alle } x \in D \textit{ mit } |x - x_0| < \delta$$

gilt.
Weiter heißt f stetig auf D, *wenn f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist. Wir setzen*

$$C(D) := \{f : D \to \mathbb{K} \mid f \textit{ stetig auf } D\}.$$

Wir können stetige Funktionen auch äquivalent mit Hilfe von Folgen charakterisieren:

Satz 18.2. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $f : D \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert, auch die Folge $(f(x_n))$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt* (Folgenstetigkeit).

Beweis. Sei zunächst f in x_0 stetig, (x_n) eine Folge in D, die gegen x_0 konvergiert und $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach der Definition der Stetigkeit ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Da (x_n) gegen x_0 konvergiert, gibt es nun weiter ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Also gilt für all diese n auch $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ und wir haben Konvergenz der Folge $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ gezeigt.
Es bleibt die umgekehrte Implikation zu zeigen. Dazu nehmen wir an, f wäre nicht stetig in x_0. Das bedeutet (vgl. Abschnitt 1.2): es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass es für jedes $\delta > 0$ ein $x = x(\delta) \in D$ gibt mit $|x - x_0| < \delta$, aber $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Insbesondere gilt das für alle δ der Form $1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Also gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < 1/n$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Wir betrachten nun die Folge (x_n). Wegen $|x_n - x_0| < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert diese Folge gegen x_0. Andererseits bleibt die Folge $(f(x_n))$ aber immer mindestens ε_0 von $f(x_0)$ entfernt, im Widerspruch zur Voraussetzung, nach der $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ konvergieren muss. □

Diskussionsanregung: Auf der Menge $D = [0,1] \cup \{2\}$ sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \\ 43, & x = 2 \end{cases}$$

Gegeben. Skizzieren Sie den Graphen und diskutieren Sie, ob diese Funktion auf D stetig ist.

Der folgende Satz erlaubt wieder, wie schon bei Folgen, Stetigkeitsuntersuchungen komplizierter Funktionen auf die Untersuchung einfacherer Bausteine zu reduzieren. Sein Beweis ergibt sich aus der Kombination von Satz 18.2 und den entsprechenden Aussagen für die Konvergenz von Folgen.

Satz 18.3: *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f, g: D \to \mathbb{K}$ seien stetig in $x_0 \in D$. Dann sind die Funktionen $\lambda f, f + g, fg$ und $|f|$ stetig in x_0. Ist $x_0 \in \widetilde{D} \coloneqq \{x \in D | g(x) = 0\}$, so ist $\frac{f}{g}: \widetilde{D} \to \mathbb{K}$ stetig in x_0.*

Beweis: Übungsaufgabe.

Satz 18.4: *f ist in x_0 genau dann stetig, wenn x_0 ein Isolierpunkt von D ist oder x_0 ein Häufungspunkt von D ist und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.*

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": Sei f stetig in $x_0 \in D$. Ist x_0 ein Isolierpunkt, so ist nichts weiter zu zeigen. Sei x_0 also ein Häufungspunkt von D. Wegen Stetigkeit gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Das gilt dann aber erst recht für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta$ und das bedeutet genau, dass $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

" $\Leftarrow$ ": Ist x_0 ein Häufungspunkte und gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, so bedeutet das gerade: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta$. Da aber für $x = x_0$ ohnehin $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ gilt, kann das erweitert werden zu: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, was der Definition von Stetigkeit entspricht.
Ist x_0 ein Isolierpunkt, so gibt es per Definition ein $\delta_I > 0$, sodass $(x_0 - \delta_I, x_0 + \delta_I) \cap D = \{x_0\}$. Sei also $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \delta_I > 0$, dann gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta_I$, denn nur x_0 erfüllt die Bedingung $|x - x_0| < \delta_I$.

Für Funktionen gibt es zusätzlich zu Addition und Multiplikation auch noch die Hintereinanderausführung als Verknüpfung. Tatsächlich erhält auch diese die Stetigkeit.

Satz 18.5. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und die Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ sei stetig in $x_0 \in D$. Weiter seien $E \subseteq \mathbb{K}$ mit $f(D) \subseteq E$ und eine weitere Funktion $g : E \to \mathbb{K}$ gegeben, die in $f(x_0)$ stetig ist. Dann ist die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{K}$ stetig in x_0.*

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Dann folgt aus der Stetigkeit von f mit Satz 18.2 sofort $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$. Der selbe Satz zusammen mit der Stetigkeit von g in $f(x_0)$ liefert uns dann $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ $(n \to \infty)$. Also ist wiederum nach Satz 18.2 die Funktion $g \circ f$ stetig in x_0. □

Wir wollen nun die Stetigkeit einer ganzen Klasse von Funktionen auf einmal zeigen, nämlich all derer, die durch eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius gegeben sind.

19. Eigenschaften stetiger Funktionen

Dieser Abschnitt enthält einen wichtigen Satz über stetige, reellwertige Funktionen nach dem anderen. Wir werden später immer wieder auf die hier entwickelten Ergebnisse zurückgreifen. In allen Sätzen dieses Abschnitts ist nur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zugelassen. (Überlegen Sie sich, warum!)

Satz 19.1 (Zwischenwertsatz)**.** *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a, b]$. Ist y_0 eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$, so gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.*

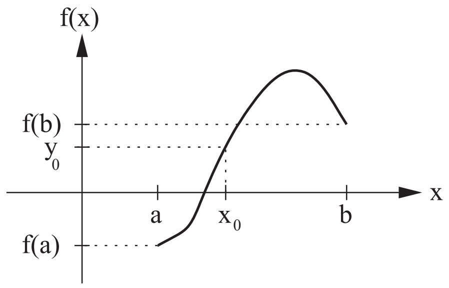


Abbildung 19.1.: Der Zwischenwertsatz

Beweis. Ist $y_0 = f(a)$ oder $y_0 = f(b)$, so sind wir bereits fertig. Wir können also annehmen, dass $y_0 \neq f(a)$ und $y_0 \neq f(b)$ gilt. Weiter nehmen wir an, dass $f(a) < f(b)$ ist, denn im Fall $f(a) = f(b)$ muss $y_0 = f(a) = f(b)$ sein, und den Fall $f(a) > f(b)$ kann man analog behandeln. Wir haben also $f(a) < y_0 < f(b)$. Setze

$$M := \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y_0\}.$$

Dann gilt $a \in M$, also ist $M \neq \emptyset$. Außerdem ist M durch b nach oben beschränkt, d. h. $x_0 := \sup M$ existiert. Daher kann für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $x_0 - 1/n$ keine obere Schranke von M sein, also existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq x_0.$$

Nach dem Sandwich-Theorem konvergiert die Folge (x_n) gegen x_0 und da für jedes Folgenglied $a \leq x_n \leq b$ gilt, haben wir damit auch gleich $x_0 \in [a, b]$.

Nun folgern wir aus der Stetigkeit von f mit Satz 18.2, dass die Folge $(f(x_n))$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt. Da außerdem jedes x_n in M gewählt war, gilt $f(x_n) \le y_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist im Grenzwert $f(x_0) \le y_0$. Es bleibt noch die umgekehrte Ungleichung $f(x_0) \ge y_0$ zu zeigen.
Dazu beobachten wir zunächst, dass sogar $x_0 \in [a, b)$ gelten muss, denn $x_0 = b$ kann wegen $f(x_0) \le y_0$ und $f(b) > y_0$ nicht sein. Nun nehmen wir an, es wäre $f(x_0) < y_0$. Dann ist $\varepsilon := y_0 - f(x_0) > 0$. Nach der Definition der Stetigkeit gibt es zu diesem ε ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in [a, b] \cap U_\delta(x_0)$$

gilt. Sei nun ein $z \in [a, b]$ mit $x_0 < z < x_0 + \delta$ gewählt. Das geht, da $x_0 < b$ ist. Dann gilt

$$f(z) - f(x_0) \le |f(z) - f(x_0)| < \varepsilon = y_0 - f(x_0).$$

Also ist $f(z) < y_0$ und damit $z \in M$. Da x_0 das Supremum von M ist, muss dann $z \le x_0$ gelten, was ein Widerspruch ist.
Zusammen ist damit $f(x_0) = y_0$. □

Eine wichtige Folgerung aus diesem Satz ist die folgende.

Satz 19.2 (Nullstellensatz von Bolzano). *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C([a, b])$ mit $f(a)f(b) < 0$ gegeben. Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.*

Beweis. Wir müssen uns nur klarmachen, dass die Voraussetzung $f(a)f(b) < 0$ bedeutet, dass entweder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ oder $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ ist. Dann folgt die Behauptung sofort aus Satz 19.1. □

Wir können dieses Ergebnis nun anwenden, um das Bild der reellen Exponentialfunktion zu bestimmen.

Beispiel 19.3. Wir zeigen, dass für die Exponentialfunktion gilt:

$$E(\mathbb{R}) = \{E(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty).$$

Wir wissen schon (vgl. Satz 14.9 (c)), dass $E(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, d. h. es ist $E(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$. Es bleibt die umgekehrte Inklusion zu zeigen.
Sei dazu $y_0 \in (0, \infty)$. Wir wissen aus Beispiel 17.13 (b), dass

$$\lim_{x\to-\infty} E(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} E(x) = \infty$$

gilt. Also gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $E(a) < y_0$ gilt und ein $b \in \mathbb{R}$ mit $E(b) > y_0$. Da damit zwangsläufig $E(a) < E(b)$ gilt und die Exponentialfunktion nach Satz 14.9 (e) streng monoton wachsend ist, muss $a < b$ gelten. Da die Exponentialfunktion nach Satz 18.6 auch auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, sind nun alle Voraussetzungen von Satz 19.1 erfüllt. Es gibt also ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $E(x_0) = y_0$. Damit ist $y_0 \in E(\mathbb{R})$ und wir sind fertig.

Definition 19.4. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt* beschränkt, *falls die Menge $f(D)$ beschränkt ist, d. h. falls ein $C \geq 0$ existiert, so dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in D$ gilt.*

Definition 19.5. *(a) Eine Teilmenge A von $\mathbb{K}$ heißt* abgeschlossen, *wenn für jede Folge (x_n) in A, die in $\mathbb{K}$ konvergiert, $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$ gilt.*

(b) Eine Teilmenge K von $\mathbb{K}$ heißt kompakt, *wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Warnung 19.6. Die angegebene Definition der Kompaktheit ist für die hier betrachteten Teilmengen von $\mathbb{K}$ sehr einfach und praktisch. Der Kompaktheitsbegriff kommt in vielen Bereichen der Mathematik vor und ist oft sehr wichtig. Im Allgemeinen hat er eine andere, leider deutlich sprödere, Definition, die wir zu Beginn der Analysis II kennenlernen werden. Diese ist im Allgemeinen *nicht* äquivalent zu der hier angegebenen Definition!

Wir können nun den fundamentalen Satz formulieren, der das Verhalten stetiger Funktionen auf kompakten Mengen beschreibt.

Satz 19.7. *Es sei $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt und nicht-leer sowie $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $x_*, x^* \in K$, so dass*

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \textit{für alle } x \in K$$

gilt. Insbesondere ist f beschränkt.

Man beachte, dass damit insbesondere $\max f(K) = f(x^*)$ und $\min f(K) = f(x_*)$ existieren.
In Worte gefasst lautet dieser Satz damit:

> Eine stetige Funktion auf einem Kompaktum nimmt ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Kompaktum an.

Dass dabei jede der Voraussetzungen zwingend nötig ist, veranschaulichen die folgenden Beispiele.

Beispiel 19.8. (a) Ist $K = [0, 1]$ und

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ falls } x \in (0,1), \\ \frac{1}{2}, \text{ falls } x = 0 \text{ oder } x = 1, \end{cases}$$

so ist $f(K) = (0, 1)$, d.h. es gibt keine $x_*, x^* \in [0, 1]$ mit $f(x_*) = 0$ und $f(x^*) = 1$. Wir brauchen also die Stetigkeit von f.

(b) Ist $K = (0, 1]$ und $f(x) = 1/x$ für $x \in K$, so ist f auf K stetig, aber die Menge $f(K)$ ist nicht beschränkt, da $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$ ist. Wir brauchen also die Abgeschlossenheit von K.

(c) Ist schließlich $K = \mathbb{R}$ und $f(x) = E(x)$, so ist diese Funktion wieder auf ganz K stetig und K ist abgeschlossen, aber f nicht beschränkt. Wir brauchen also die Beschränktheit von K.

Beweis von Satz 19.7. Wir zeigen zunächst, dass unter den Voraussetzungen des Satzes die Funktion f beschränkt ist. Wäre dem nicht so, gäbe es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $|f(x_n)| > n$. Dank der Beschränktheit von K und dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 9.10) können wir nun aus der Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) auswählen. Da K außerdem abgeschlossen ist, muss deren Grenzwert $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ ebenfalls in K liegen. Nun nutzen wir die Stetigkeit von f auf K und folgern, dass die Folge $(f(x_{n_k}))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. Insbesondere ist damit die Folge $(f(x_{n_k}))$ beschränkt, was im Widerspruch zur Konstruktion der Folge (x_n) steht, nach der $|f(x_{n_k})| > n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.
Da nun $f(K)$ beschränkt ist, existieren zumindest $\sup f(K)$ und $\inf f(K)$. Wir betrachten hier nur $S := \sup f(K)$, die Untersuchung für das Infimum verläuft analog. Zu zeigen ist, dass es ein $x^* \in K$ gibt, so dass $f(x^*) = S$ gilt. Dazu stellen wir zunächst fest, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $S - 1/n$ keine obere Schranke von $f(K)$ sein kann. Also gibt es jeweils ein $y_n \in f(K)$, und damit ein $x_n \in K$ mit $f(x_n) = y_n$, so dass

$$S - \frac{1}{n} < f(x_n) \le S \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{19.1}$$

gilt. Die so gewonnene Folge (x_n) enthält wie jede Folge in K eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). Wir setzen

$$x^* := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

Dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von K sofort $x^* \in K$ und dank der Stetigkeit von f haben wir $f(x_{n_k}) \to f(x^*)$ für $k \to \infty$. Mit Hilfe von (19.1) und dem Sandwich-Theorem gilt außerdem

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = S.$$

Also ist $f(x^*) = S$. □

Als nächstes wollen wir zeigen, dass sich die Stetigkeit einer Funktion auf ihre Umkehrfunktion überträgt, sofern diese existiert. Wir beobachten dazu, dass für ein Intervall I, insbesondere ist auch $I = \mathbb{R}$ zugelassen, und eine streng monotone Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, f auf I injektiv ist (Übungsaufgabe!). Damit ist nach Einschränkung des Wertebereichs die Funktion $f : I \to f(I)$ bijektiv und die Umkehrfunktion f^{-1} existiert in diesem Fall. Wir wissen über die Umkehrfunktion sogar noch mehr.

Lemma 19.9. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to f(I)$ eine streng monoton wachsende (bzw. fallende) Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend).*

Beweis. Wir führen den Beweis nur für wachsende Funktionen, die geklammerte Aussage beweist man analog. Es sei also f streng monoton wachsend.
Es seien $y_1, y_2 \in f(I)$ mit $y_1 < y_2$ gegeben. Dann existieren $x_1, x_2 \in I$, so dass $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ gilt. Da f streng monoton wächst und $f(x_1) < f(x_2)$ gilt, muss auch $x_1 < x_2$ sein. Damit ist aber

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2),$$

was nichts anderes bedeutet, als dass f^{-1} streng monoton wächst. □

21. Gleichmäßige Stetigkeit

Wir bekommen es in diesem Abschnitt mit einem ähnlichen Phänomen wie bei der Unterscheidung zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz zu tun. Erinnern wir uns an die Definition der Stetigkeit, so war $f : D \to \mathbb{K}$ in einem Punkt $x_0 \in D$ genau dann stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \, \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ gilt } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Das zu bestimmende δ darf hierbei außer von ε, von dem es logischerweise abhängen muss, auch von x_0 abhängen. Es liegt also nahe, ähnlich wie bei der Konvergenz von Funktionenfolgen eine „Stetigkeit von höherer Qualität" zu definieren, bei der das δ gleichmäßig in $x_0 \in D$ gewählt werden muss.
Dass das tatsächlich zu einem restriktiveren Begriff führt, zeigt das folgende Beispiel.

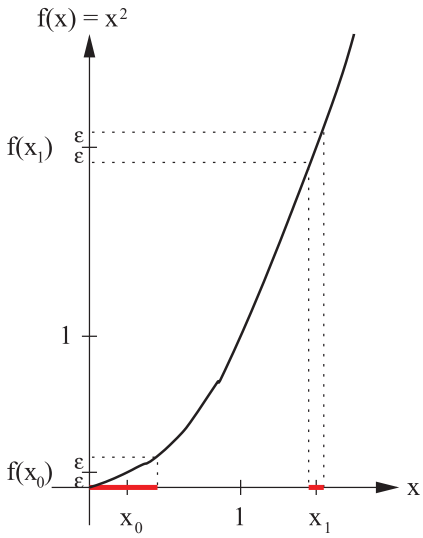


Abbildung 21.1.: Die Abhängigkeit des Stetigkeits-Deltas von x_0

Beispiel 21.1. Es sei $D = [0, \infty)$ und $f(x) = x^2$, $x \in D$, vgl. Abbildung 21.1. Diese Funktion ist offensichtlich stetig, beispielsweise weil sie durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius unendlich dargestellt wird. Also gibt es zu jedem $x_0 > 0$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$$

für alle $x > 0$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Können wir aber dieses δ unabhängig von x_0 wählen? Die Antwort ist Nein, denn wenn wir $x = x_0 + \delta/2$ setzen, so gilt $|x - x_0| = \delta/2 < \delta$, aber damit ist auch

$$\varepsilon > |x^2 - x_0^2| = |x + x_0||x - x_0| = \Big(2x_0 + \frac{\delta}{2}\Big)\frac{\delta}{2} = \delta x_0 + \frac{\delta^2}{4}.$$

Insbesondere ist damit $\delta x_0 < \varepsilon$, d. h.

$$\delta < \frac{\varepsilon}{x_0}.$$

Je größer also das x_0 wird, umso kleiner müssen wir bei gegebenem ε das δ wählen. Anschaulich liegt das daran, dass der Graph der Funktion für große x immer weiter ansteigt, wenn wir also im Bildbereich nur eine Abweichung von ε um das $f(x_0)$ zulassen, wird der verfügbare Platz für das δ auf der x-Achse immer geringer je weiter wir mit dem x_0 nach rechts rutschen.

Wir wollen nun die gleichmäßige Stetigkeit exakt definieren.

Definition 21.2. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$. Dann heißt $f : D \to \mathbb{K}$* gleichmäßig stetig *auf D, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ für alle } x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ gilt.}$$

Bemerkung 21.3. (a) Es ist klar, dass eine Funktion, die auf einer Menge D gleichmäßig stetig ist, auch auf dieser Menge stetig ist, also zu $C(D)$ gehört. Die Umkehrung gilt i.A. nicht, wie Beispiel 21.1 zeigt.

(b) Wie bei der gleichmäßigen Konvergenz auch, ist die Frage, ob eine stetige Funktion sogar gleichmäßig stetig ist, sehr vom zu Grunde gelegten Definitionsbereich abhängig. Es ist eine Eigenschaft, die der Funktion *auf einer Menge* zukommt. Es ist deshalb im Gegensatz zur Stetigkeit nicht sinnvoll von „gleichmäßiger Stetigkeit in einem Punkt“ zu sprechen.

Wir wollen nun einen Fall behandeln, in dem Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit tatsächlich zusammenfallen.

Satz 21.4. *Ist $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(K)$, so ist f gleichmäßig stetig auf K.*

Beweis. Wir nehmen an, f wäre nicht gleichmäßig stetig auf K. Nun müssen wir unsere Gesellenprüfung in elementarer Logik ablegen und die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit negieren. Am besten macht man das ganz formal und ohne viel nachzudenken mit den Quantoren. Wir schreiben uns noch einmal hin, was gleichmäßige Stetigkeit bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \text{so dass}\ \forall x, y \in K \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ gilt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Beim Negieren müssen wir aus jedem $\forall$ ein $\exists$ und aus jedem $\exists$ ein $\forall$ machen sowie die Aussage negieren. Das ergibt: f ist auf K nicht gleichmäßig stetig, falls

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x = x(\delta) \in K \ \exists y = y(\delta) \in K \text{ mit } |x - y| < \delta, \quad \text{so dass } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Nun machen wir uns klar, was wir da bekommen haben. Nach Annahme gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ etwas gilt. Wir begnügen uns damit, alle δ anzuschauen, die von der Form $1/n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ sind. Also gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ zwei Zahlen $x_n, y_n \in K$ existieren, für die zum einen

$$|x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n} \quad \text{und zum anderen} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

gilt. Nun ist die Folge (x_n) eine Folge in der kompakten Menge K, d. h. sie ist insbesondere beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 9.10 besitzt sie damit eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) und es gilt $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$, da K abgeschlossen ist. Betrachten wir die Folge (y_{n_k}), so bekommen wir

$$y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k}).$$

Der erste Summand auf der rechten Seite konvergiert gegen x_0 nach Konstruktion und wegen $|x_n - y_n| < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert der zweite gegen Null. Also sind beide Summanden auf der rechten Seite für $k \to \infty$ konvergent, was bedeutet, dass auch die Folge (y_{n_k}) für $k \to \infty$ konvergiert mit $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$. Da f in x_0 stetig ist, gilt

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq \lim_{k\to\infty} \big(|f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y_{n_k})|\big) = 0 + 0 = 0,$$

was im Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ steht. Also muss f gleichmäßig stetig in K sein. □

Wir führen noch einen weiteren Stetigkeitsbegriff ein.

Definition 21.5. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $f : D \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Diese heißt* Lipschitz-stetig, *falls eine Konstante $L \geq 0$ existiert, so dass*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in D$ gilt.

Bemerkung 21.6. Man kann sich leicht überlegen, dass der Begriff der Lipschitz-Stetigkeit sogar ein noch stärkerer als der der gleichmäßigen Stetigkeit ist, denn wenn f Lipschitz-stetig und $\varepsilon > 0$ ist, so gilt für jedes $0 < \delta < \varepsilon/L$ sofort

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$. Man beachte, dass das δ nur von ε und nicht von x oder y abhängt, also ist f tatsächlich gleichmäßig stetig. Die Umkehrung ist auch hier wieder i.A. falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 21.7. Wir setzen $D = [0, 1]$ und $f(x) = \sqrt{x}$. Dann ist f nach Satz 7.1 stetig und nach Satz 21.4 auch gleichmäßig stetig auf D. Nehmen wir aber an, es gäbe ein $L \geq 0$, so dass für alle $x, y \in D$ gilt

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|,$$

so folgt für die spezielle Wahl $y = 0$ sofort $\sqrt{x} \leq Lx$, d. h.

$$L \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ für alle } x \in (0, 1].$$

Also ist f nicht Lipschitz-stetig.