

# Lösung Black Jack



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



---

## Aufgabe 1

---

Insgesamt wird Black Jack mit 312 Karten gespielt.

In jedem Spielkartensatz befinden sich vier Karten einer Sorte( z.B. Buben).

Da mit sechs Spielkartensätzen gespielt wird, beinhaltet ein Black Jack Kartendeck jeweils 24 Karten einer Sorte.

Einen Black Jack kann man mit folgenden Karten Kombinationen bekommen:

As-König, As-Dame, As-Bube, As-10, König-As, Dame-As, Bube-As, 10-As

Die Wahrscheinlichkeit eine dieser Kombinationen zu ziehen beträgt  $\frac{24}{312} \cdot \frac{24}{310}$ .

Somit ist die Wahrscheinlichkeit einen Black Jack zu erhalten

$$P(„21“) = 8 \cdot \frac{24}{312} \cdot \frac{24}{310} = 0,04764 = 4,76\%$$

---

## Aufgabe 2

---

Der Spieler zieht die erste Karte. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Karte die Wertigkeit 10 besitzt ist  $\frac{92}{312}$ , die Wahrscheinlichkeit, dass diese Karte die Wertigkeit 2 (oder 3 oder 4 oder 5 oder 6 oder 7 oder 8 oder 9 oder 11) hat ist  $\frac{24}{312}$ . Nun ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass die Zweite gezogene Karte den gleichen Wert hat. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt  $\frac{91}{311}$  bzw.  $\frac{23}{311}$ . Somit lässt sich die Wahrscheinlichkeit für „Teilen“ wie folgt berechnen:

$$9 \cdot \frac{24}{312} \cdot \frac{23}{311} + \frac{92}{312} \cdot \frac{91}{311} = 0,137 = 13,7\%$$

---

## Aufgabe 3

---

Um genau 21 Punkte zu erreichen muss man als nächste Karte eine 2 ziehen.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Die Bank hat eine 2 gezogen:

$$\frac{23}{308} = 0,07468 = 7,5\%$$

b) Die Bank hat zwei 2en gezogen:

$$\frac{22}{308} = 0,07143 = 7,1\%$$

c) Die Bank hat keine 2 gezogen:

$$\frac{24}{308} = 0,07792 = 7,8\%$$

---

## Aufgabe 4

---

Es sind alle Kombinationen möglich, bei welchen noch eine Karte zu 21 Punkten fehlt und bei welchen die fehlende Punktzahl nicht schon einmal von Dir selbst oder der Bank gezogen wurden.

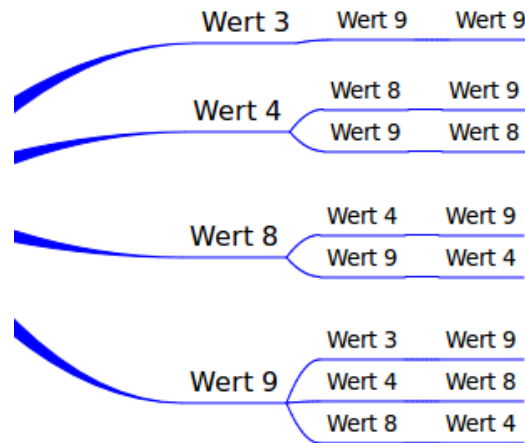
Zum Beispiel:

Bank:As,5

Du: 10,9

noch zu ziehenden Karte: 2

---



### Aufgabe 5

In folgendem Baumdiagramm sieht man die Ziehungen, welche günstig sind, also in der Summe aus drei Karten den Wert 21 erreichen.

Daraus ergibt sich mit Hilfe der Pfadregeln die Wahrscheinlichkeit mit drei Karten auf genau 21 Punkte zu kommen wie folgt:

$$P(21\text{Punkte}) = \frac{24}{312} \cdot \frac{24}{310} \cdot \frac{23}{308} + \frac{24}{312} \cdot \frac{24}{310} \cdot \frac{24}{308} + \frac{24}{312} \cdot \frac{24}{310} \cdot \frac{24}{308} + \frac{24}{312} \cdot \frac{24}{310} \cdot \frac{24}{308}$$

$$+ \frac{24}{312} \cdot \frac{24}{310} \cdot \frac{24}{308} + \frac{24}{312} \cdot \frac{24}{310} \cdot \frac{23}{308} + \frac{24}{312} \cdot \frac{24}{310} \cdot \frac{24}{308} + \frac{24}{312} \cdot \frac{24}{310} \cdot \frac{24}{308} = 0,0287 = 2,87\%$$

Die Aussichten sind also nicht so gut, vielleicht sollte man kein Spiel mehr wagen.

### Aufgabe 6

Du überkaufst Dich nicht, falls Du ein As, eine 2 oder eine 3 ziehst.

Annahme: Die Bank hat eine 5 offen liegen und Du hast bereits eine 8 und eine 10 gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit ein As, eine 2 oder eine 3 zu ziehen liegt bei  $\frac{23}{308}$  bzw. bei  $\frac{24}{308}$ , je nach dem ob die verdeckte Karte der Bank ein As, eine 2 oder eine 3 ist oder nicht.

Falls die verdeckte Karte der Bank keine der drei oben genannten Karten ist, ist die Wahrscheinlichkeit sich nicht zu überkaufen, also ein As, eine 2 oder eine 3 zu ziehen

$$3 \cdot \frac{24}{308} = 0,02338 = 2,3\%$$

Falls die verdeckte Karte der Bank eine der drei oben genannten Karten ist, ist die Wahrscheinlichkeit sich nicht zu überkaufen, also ein As, eine 2 oder eine 3 zu ziehen

$$2 \cdot \frac{24}{308} + 1 \cdot \frac{23}{308} = 0,02305 = 2,3\%$$

Du solltest keine Karte mehr ziehen, da die Wahrscheinlichkeit sich nicht zu überkaufen nur 2,3% ist.

---

## Aufgabe 7

---

Aus Aufgabe 1 wissen wir, dass sich die Wahrscheinlichkeit Black Jack zu bekommen folgendermaßen berechnet:  
 $P(„21“) = 8 \cdot \frac{24}{312} \cdot \frac{24}{310} = 0,04764 = 4,76\%$

Wir nehmen nun an, dass bereits  $x$  Karten gezogen wurden, darunter aber kein As und keine Karte mit Wert 10. Wir berechnen nun, wie viele Karten bereits gezogen sein müssen, damit die Wahrscheinlichkeit einen Black Jack zu bekommen 50% ist.

$$P(„21“) = 8 \cdot \frac{24}{312 - x} \cdot \frac{24}{310 - x} = 0,5$$

$$0 = x^2 - 622x + 87504$$

Mit Hilfe der p-q-Formel ergeben sich für die quadratische Gleichung folgenden Lösungen:

$$x_1 = 407$$

$$x_2 = 215$$

Die erste Lösung macht keinen Sinn. Die Lösung ist also, dass 215 Karten gezogen sein müssen, davon aber keine Asse und Karten mit Wert 10, damit die Wahrscheinlichkeit Black Jack zu bekommen 50% ist.

Die Berechnung für eine Wahrscheinlichkeit von 75% erfolgt analog. Als Lösung ergibt sich

$$x_1 = 389$$

$$x_2 = 233$$

Auch hier zeigt sich, dass die erste Lösung unsinnig ist. Es müssen also 233 Karten bereits gezogen sein, darunter allerdings keine Asse und Karten mit Wert 10, damit die Wahrscheinlichkeit Black Jack zu bekommen bei 75% liegt.

---

## Aufgabe 8

---

Bei gleichen Gewinnplänen der Bank und des Spielers hätte der Spieler eine Erwartung von Null. Aufgrund der Asymmetrien im Gewinnplan ergeben sich jedoch einige Abweichungen. Einerseits ergibt sich bei einem Black Jack des Spielers und keinem der Bank für den Spieler ein Vorteil von 0,5. Dieses Ergebnis tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 0,0451 auf, welche als Produkt der Wahrscheinlichkeit eines Black Jacks und der Wahrscheinlichkeit des Komplements dieses Ereignisses berechnet wird. Andererseits wirkt sich das Überkaufen beider zu einem Nachteil von eins für den Spieler aus. Die Wahrscheinlichkeit dieser Situation ergibt sich aus dem Quadrat der Wahrscheinlichkeit, sich zu überkaufen  $(0,2816)^2$ . Die Gewinnerwartung des Spielers liegt also gemäß Definition bei

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x \cdot p_i(x) = 0,5 \cdot 0,0451 + (-1) \cdot 0,0793 = -0,0568$$

Ein Spieler, der die Strategie der Bank kopiert, verliert also durchschnittlich 5,68% seines Einsatzes. Es ist also nicht ratsam, die Strategie der Bank zu verfolgen.

---

## Quellen

---

- Titelbild:  
<http://de.blackjack.org/blackjack/content/rules/blackjack-basics.jpg>
- 8.Aufgabe  
[http://www.ruhr-uni-bochum.de/num1/files/theses/ba\\_rohlaender.pdf](http://www.ruhr-uni-bochum.de/num1/files/theses/ba_rohlaender.pdf)