Tobias Pisch, Angela Karl

Nash-Gleichgewicht

Erarbeitet mit Hilfe des folgenden Texts den Begriff des Nash-Gleichgewichts. Bearbeitet die Aufgabe und erklärt euch gegenseitig den Begriff. Versucht euch gegenseitig bei Verständnisproblemen zu helfen.

Generell geht es in der Spieltheorie um die Frage, welche Strategie ein Spieler wählen sollte.
So auch im Gefangenendilemma.

<table>
<tr><td colspan="4" align="right">Gefangener 2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Gefangener 1</td><td></td><td>Gestehen</td><td>Schweigen</td></tr>
<tr><td>Gestehen</td><td>- 4 | - 4</td><td>0 | - 5</td></tr>
<tr><td>Schweigen</td><td>- 5 | 0</td><td>- 2 | - 2</td></tr>
</table>

Auf den ersten Blick sieht es so aus, als sollten beide Spieler schweigen, denn dies würde beiden Gefangenen zusammen die geringste Haftzeit bringen. Allerdings können die beiden Gefangenen nicht kooperieren, also keinen bindenden Vertrag abschließen. Es muss also eine Strategie so gewählt werden, dass keiner der beiden Spielern ein Eigeninteresse daran hat, von ihr abzuweichen. Das ist mit der Strategiewahl *Schweigen* nicht der Fall, da wie schon angesprochen das Abweichen einen Spieler besser stellen würde.

In diesem Spiel nennt man die Strategie *Gestehen* eine strikt dominante Strategie. Eine strikt dominante Strategie ist eine Strategie derart, dass der Nutzen diese Strategie zu spielen immer größer ist, als der einer beliebigen anderen Strategie, unabhängig davon, welche Strategie der Gegner spielt. Es ist rational, eine solche Strategie der dominierten Strategie vorzuziehen.

Wie löst man nun aber Spiele, in denen es keine dominierten Strategien gibt, wie das Fußballspiel? Und wie löst man Spiele in ihrer gemischten Erweiterung?

Diesen Fragen widmet sich das Konzept des Nash-Gleichgewichtes, das nach seinem Erfinder John Nash benannt ist. Das Nash-Gleichgewicht ist wie folgt definiert:

Ein Nash-Gleichgewicht ist ein Strategienkombination derart, dass ein Abweichen eines Spielers von seiner Strategie, bei Festhalten der anderen Spieler an ihren Strategien, höchstens zu einer Verminderung der Auszahlung an den Abweichler führt. In einem Zwei-Personen-Spiel mit Auszahlungsfunktionen U1 für Spieler 1 und U2 für Spieler 2 lässt sich dies wie folgt mathematisch ausdrücken:

($\hat{x}, \hat{y}$) ist ein Nash-Gleichgewicht, wenn U1($\hat{x}, \hat{y}$) ≥ U1($x, \hat{y}$) und U2($\hat{x}, \hat{y}$) ≥ U2($\hat{x}, y$) für alle x aus S1 und y aus S2.

In einem Spiel mit einer Auszahlungsmatrix A für Spieler 1 und B für Spieler 2 sieht die Bedingung für das Nash-Gleichgewicht wie folgt aus:

($\hat{x}, \hat{y}$) ist ein Nash-Gleichgewicht, wenn $\hat{x}^T A \hat{y} \geq x^T A \hat{y}$ und $\hat{x}^T B \hat{y} \geq \hat{x}^T A y$ für alle x aus S1 und y aus S2.

Analog gilt die Definition für Spiele in gemischten Strategien.

Eine Strategiekombination ist für gemischte Strategien dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn die entsprechende Strategie jedes Spielers seinen erwarteten Nutzen maximiert, vorausgesetzt, dass alle anderen Spieler ihre entsprechenden Gleichgewichtsstrategien spielen.

Auch die Lösung über die Elimination strikt dominierter Strategien sind Nash-Gleichgewichte. Spiele können mehrere Nash-Gleichgewichte oder aber auch keine Nash-Gleichgewichte besitzen. Ob ein Spiel ein Nash-Gleichgewicht besitzt, hängt von der Menge und der Art der Strategien ab, die ein Spieler spielen kann.

Spiele mit endlich vielen Strategien besitzen in ihrer gemischten Erweiterung **immer** ein Nash-Gleichgewicht. Dies ist ein Satz den John Nash in seiner Dissertation bewiesen hat.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben, so ergibt sich aus den Bedingungen für das Nash-Gleichgewicht und

$$\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = 1$$
$$\hat{y}_1 + \hat{y}_2 = 1$$
$$\hat{x}^T A\, \hat{y} = \hat{x}_1 (2\,\hat{y}_1 + 4\,\hat{y}_2) + \hat{x}_2 (\hat{y}_1 + 3\,\hat{y}_2) = \hat{x}_1 - 2\,\hat{y}_1 + 3 > x_1 - 2\,\hat{y}_1 + 3$$

Für alle x_1 aus [0,1].

Somit folgt $\hat{x}_1 \geq x_1$ für alle x_1 aus [0,1] somit folgt $\hat{x}_1 = 1$ und $\hat{x}_2 = 0$.

Analog folgt $\hat{y}_1 = 1$ und $\hat{x}_2 = 0$. Somit ergibt sich, dass das Strategienpaar

$$(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

das einzige Nash-Gleichgewicht des Spiels in gemischten Strategien ist.

Nash-Gleichgewichte für besondere Spiele

Zwei-Personen-Spiele für die U1(x,y) = - U2(x,y) gilt, heißen **Nullsummenspiele**. In solchen Spielen ist der Gewinn des einen Spielers gleich dem Verlust des anderen. Setzt man die Bedingung für ein Nullsummenspiel in die Bedingungen für ein Nash-Gleichgewicht ein erhält man:

U1($\hat{x}, \hat{y}$) ≥ U1($x, \hat{y}$) und U2($\hat{x}, \hat{y}$) = - U1($\hat{x}, \hat{y}$) ≥ U2($\hat{x}, y$)= - U1($\hat{x}, y$).

Also: U1($x, \hat{y}$) ≤ U1($\hat{x}, \hat{y}$) ≤ U1($\hat{x}, y$).

Man kann zeigen, dass zwei Nash-Gleichgewichte eines Nullsummenspiels immer den gleichen Wert haben.

Ein Spiel heißt **symmetrisch**, wenn S = S1 = S2 ist und U1(x,y) = - U2(y,x), für alle möglichen Strategien x und y.
Es gilt immer U1(x,x) = U2(x,x) = 0.

Man kann zeigen, dass ein symmetrisches Nullsummenspiel genau dann ein Nash-Gleichgewicht besitzt, wenn es eine Strategie x gibt mit

U1(x,z) ≥ 0
U2(x,z) ≤ 0

für alle z aus $\bar{S}$. Es reicht allerdings U1(x,z) ≥ 0 für alle z aus $\bar{S}$ wegen der Symmetrie aus. Die Strategiekombination (x,x) ist ein Nash-Gleichgewicht des Spiels. Jedes symmetrische Matrixspiel besitzt ein Nash-Gleichgewicht dieser Form.

Aufgabe
Zeige anhand der Auszahlungsfunktionen, dass das Fußballspiel ein symmetrisches Nullsummenspiel ist.

Beispiel
Das Fußballspiel ist ein symmetrisches Nullsummenspiel mit der Auszahlungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Möchte man ein Nash-Gleichgewicht für dieses Spiel finden, kann man die Bedingung für symmetrische Nullsummenspiele nutzen.
Die Strategienkombination (x,x) ist dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn

$x^T Az \geq 0$ für alle z aus $\overline{S}$

also: $x_1(z_1 - z_2) + x_2(-z_1 + z_2) \geq 0$ für alle z aus $\overline{S}$.

Setzt man z = (1,0) und (0,1) erhält man:

$x_1 - x_2 \geq 0$ und
$-x_1 + x_2 \geq 0$

also $x_1 = x_2$ und somit $x_1 = x_2 = 0.5$.

Definitionen zu Einheit 3

Ein **Nash-Gleichgewicht** ist ein Strategienkombination derart, dass ein Abweichen eines Spielers von seiner Strategie, bei Festhalten der anderen Spieler an ihren Strategien, höchstens zu einer Verminderung der Auszahlung an den Abweichler führt:

$(\hat{x}, \hat{y})$ ist ein Nash-Gleichgewicht, wenn $U1(\hat{x}, \hat{y}) \geq U1(x, \hat{y})$ und $U2(\hat{x}, \hat{y}) \geq U2(\hat{x}, y)$ für alle x aus S1 und y aus S2.

Ein Spiel heißt **Nullsummenspiel**, wenn

U1(x,y) = -U2(x,y)

Ein Nullsummenspiel heißt **symmetrisch**, wenn

S = S1 = S2 ist und
U1(x,y) = - U2(y,x)

Für alle möglichen Strategien x und y.