Die Dreiecks – Ungleichung: $|x + y| \leq |x| + |y|$

In dieser Proseminar-Arbeit geht es um die sog. Dreiecks-Ungleichung (Δ-Ungl.). Wir werden unter anderen sehen, wie man die Δ-Ungl. beweisen kann, welche Bedeutung sie in der Mathematik hat, was die Δ-Ungl. mit einem Dreieck zu tun hat und warum sie so genannt wird. Des weiteren wird es zu diesem Thema weitere Anregungen und Aufgaben geben. Geschrieben von Vanessa Bunge.

Kleine Vorausschau:

§ 1 Beweis der Dreiecks-Ungleichung in IR
§ 2 Warum man diese Ungleichung als Δ-Ungl. bezeichnet
§ 3 Anwendungsbereiche der Δ-Ungl. in der Mathematik
§ 4 Die Δ-Ungl. in allgemeineren Situationen und ihre Bedeutung in der Praxis
§ 5 Aufgaben
§ 6 Hintergrundwissen Absolutbetrag (Betrag)
§ 7 Ausführlicher Beweis der Δ-Ungl. (in IR)
§ 8 Abkürzungen
§ 9 Quellenangaben
§ 10 Index

§ 1 Beweis der Dreiecks-Ungleichung in IR

In diesem Abschnitt werden wir die Δ-Ungl. in den reellen Zahlen (d.h. in IR) beweisen. Das bedeutet, dass wir zeigen müssen, dass die Δ-Ungl. für alle reellen Zahlen x, y gilt.

Um die Δ-Ungl. beweisen zu können benötigen wir die Definition und einige Eigenschaften des Absolutbetrags.

Einschub Absolutbetrag (Betrag):

Definition:
Der Absolutbetrag (auch Betrag genannt) wird für alle $x \in$ IR definiert als:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

- Wenn $x \geq 0$, dann gilt $|x| = x$
  Als Ergebnis erhält man im Fall $x \geq 0$ die (nicht negative) Zahl x.
- Wenn $x < 0$, dann gilt $|x| = -x$
  Als Ergebnis erhält man im Fall $x < 0$ eine positive Zahl größer Null.

Das bedeutet, dass positive Zahlen pos. bleiben und negative Zahlen pos. gemacht werden, indem man das Vorzeichen ändert.

In § 7 wird die Bedeutung des Absolutbetrags an Beispielen ausführlich erklärt und es werden alle Eigenschaften, die wir hier benötigen, detailliert bewiesen.

Um die Δ-Ungl. beweisen zu können werden wir folgende Eigenschaften des Absolutbetrags verwenden. Diese gelten ∀ (für alle) $x \in$ IR und lauten:

$| x | \geq 0$
$| x | = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$| x | = | -x |$

Beweis der Δ-Ungleichung in IR:

z.z. $| x + y | \leq | x | + | y |$ gilt für alle reellen Zahlen x, y

Um die Δ-Ungl. zu beweisen zeigt man zunächst,
dass $x \leq | x |$, $-x \leq | x |$ und analog dazu $y \leq | y |$, $-y \leq | y |$ gilt.

z.z. **$x \leq | x |$** (analog $y \leq | y |$) mittels Fallunterscheidung

Beweis:
1. Fall Wenn $x \geq 0$, dann gilt $| x | = x$.
2. Fall Wenn $x < 0$, dann gilt $| x | = -x$.
Es gilt: $x < 0$ und $0 < | x |$ => $x < 0 < | x |$ => $x < | x |$
In beiden Fällen folgt demnach $x \leq | x |$, was zu beweisen war.

z.z. **$- x \leq | x |$** (analog $-y \leq | y |$)

Beweis:
$-x \leq | -x | = x$, da wir in der obigen Überlegung x durch -x ersetzen können.

Aus der Addition von $x \leq | x |$ und $y \leq | y |$ folgt die Ungl. $x + y \leq | x | + | y |$.
Aus der Addition von $-x \leq | x |$ und $-y \leq | y |$ folgt die Ungl. $-x -y \leq | x | + | y |$.

Betrachtet man nun die erhaltenen Ungleichungen dann ergeben diese zusammengenommen die Δ-Ungleichung: $| x + y | \leq | x | + | y |$.

=> $| x + y | \leq | x | + | y |$ gilt für alle x, y aus IR □

In § 8 wird die Δ-Ungl. sehr detailliert und ausführlich bewiesen,
um zu zeigen, welche Überlegungen in den Beweis der Δ-Ungl. mit einfließen.

§ 2 Warum man diese Ungleichung als Δ-Ungl. bezeichnet

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, warum man diese Ungleichung als Δ-Ungl. bezeichnet, was Sie mit einem Dreieck zu tun hat und wie man sie anschaulich darstellen kann.

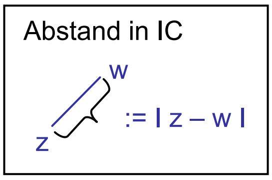
Im vorigen Abschnitt haben wir die Δ-Ungl. in IR (in den reellen Zahlen) exemplarisch bewiesen. Hier eine kleine Auflistung, was wir in diesem Abschnitt alles voraussetzen werden.

- In den reellen Zahlen IR ist die Δ-Ungl. definiert (def.) als
  $| x + y | \leq | x | + | y |, \quad \forall x, y \in$ IR.

- In den komplexen Zahlen (d.h. in IC) ist die Δ-Ungl. definiert als
  $| z + w | \leq | z | + | w |, \quad \forall z, w \in$ IC

  In den komplexen Zahlen gibt es die Δ-Ungl. auch in dieser Form:
  $| z_1 - z_3 | \leq | z_1 - z_2 | + | z_2 - z_3 |, \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in$ IC

  Was es mit diesen beiden Formen der Δ-Ungl. auf sich hat und wie sie im Zusammenhang stehen, werden wir ebenfalls in diesem Abschnitt darstellen.



- Für Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ in IR^n gilt:
  $| \underline{a} + \underline{b} | \leq | \underline{a} | + | \underline{b} |$

- **Definitionen:**

  Eine **komplexe Zahl z** ist definiert als $z := z + iy$

  Der **Betrag** einer komplexen Zahl $z := z + iy$ ist def. als $| z | := \sqrt{x^2 + y^2}$

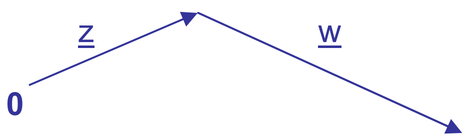
  Der **Abstand** der komplexen Zahlen z und w ist definiert als die Zahl $| z – w |$

Konstruktion und Interpretation der Δ-Ungl. (Teil I)

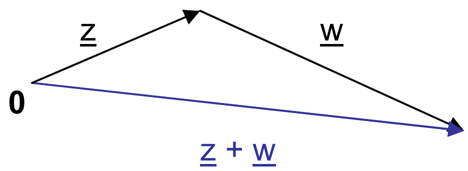
In diesem Abschnitt werden wir die Δ-Ungl. Anhand eines Dreiecks interpretieren. Dazu verwenden wir die Vektorrechnung, arbeiten in den Komplexen Zahlen (d.h. in IC) und setzen voraus, dass die Δ-Ungl. gilt.
Des weiteren setzen wir voraus, dass unser erster Vektor im Ursprung beginnt.

Die Δ-Ungl. in IC ist definiert als: $| z + w | \leq | z | + | w |, \quad \forall z, w \in$ IC

Wir nehmen einen Vektor $\underline{z}$, der im Ursprung beginnt, und addieren einen Vektor $\underline{w}$ dazu. Dies könnte dann z.B. so aussehen:
(Vektoraddition)



Der Pfeil von 0 bis zu Pfeilspitze w ist dann der Vektor $\underline{z} + \underline{w}$,
den wir ebenfalls in unsere Skizze einzeichnen.



Nach dem Satz von Pythagoras sieht man geom., dass $|\, \underline{z} + \underline{w} \,| \leq |\, \underline{z} \,| + |\, \underline{w} \,|$ gilt.

Frage: Wann gilt die Gleichheit in der Δ-Ungl. ?

Nun müsste man noch die zweite Δ-Ungl. in $\mathbb{C}$ zeigen, die $\forall\ Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}$ gilt.

Konstruktion und Interpretation der Δ-Ungl. (Teil II)

Eine etwas andere Art und Weise die Δ-Ungl. zu zeigen. Unser Ziel ist es in diesem Abschnitt u.a. die zweite Δ-Ungl. $|\, Z_1 - Z_3 \,| \leq |\, Z_1 - Z_2 \,| + |\, Z_2 - Z_3 \,|$ zu zeigen, die für alle Z_1, Z_2, Z_3 aus den komplexen Zahlen gilt.

<u>Variante 1</u>

Wir betrachten den Abstand $|\, Z_1 - Z_3 \,|$ und erweitern diesen geschickt mit Null, indem wir $- Z_2$ subtrahieren und $+ Z_2$ dazu addieren, dies sieht dann so aus: $|\, Z_1 - Z_3 \,| = |\, Z_1 - Z_2 + Z_2 - Z_3 \,|$. Darauf können wir nun die 1. Form der Δ-Ungl ($|\, z + w \,| \leq |\, z \,| + |\, w \,|\ \forall\ z, w \in \mathbb{C}$) anwenden und haben somit gezeigt, dass die 2. Form der Δ-Ungl. $\forall$ (für alle) Z_1, Z_2, Z_3 gilt.

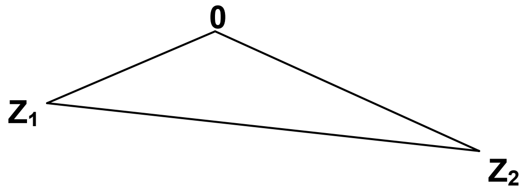
$$|\, Z_1 - Z_3 \,| = |\, Z_1 - Z_2 + Z_2 - Z_3 \,| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |\, Z_1 - Z_2 \,| + |\, Z_2 - Z_3 \,|$$

<u>Variante 2</u> (geometrisch)

Erinnerung:
Der Abstand der komplexen Zahlen z und w ist definiert als die Zahl $|\, z - w \,|$

Betrachten wir nun unser Dreieck aus dem Abschnitt „Konstruktion und Interpretation der Δ-Ungl. (Teil I)“ aus einem etwas anderem Blickwinkel, indem wir nun die Abstände zwischen den Punkten des Dreiecks betrachten.

Wir arbeiten weiterhin in den komplexen Zahlen, ein Punkt des Dreiecks liegt im Ursprung und die anderen zwei Punkte des Dreiecks nennen wir Z_1 und Z_2.



Betrachtet man die Abstände zwischen den Punkten O, Z_1, Z_2 dann gilt:

Abstand der Punkte **Z_1 0** ist definiert als $| Z_1 |$ (da $| Z_1 - 0 | = | Z_1 |$)
Abstand der Punkte **Z_2 0** ist definiert als $| Z_2 |$ (da $| Z_2 - 0 | = | Z_2 |$)
Abstand der Punkte **Z_1 Z_2** ist definiert als $| Z_1 - Z_2 |$

$| Z_1 |$ kann man aber auch schreiben als: $| Z_2 + (Z_1 - Z_2) |$

$$\Rightarrow | Z_1 | = | Z_2 + (Z_1 - Z_2) | \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} | Z_2 | + | Z_1 - Z_2 |$$

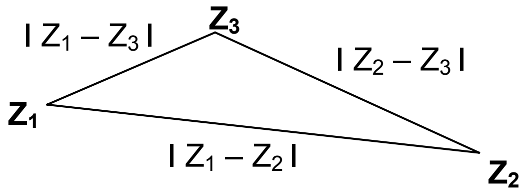
$$\boldsymbol{\Rightarrow | Z_1 | \leq | Z_1 - Z_2 | + | Z_2 |} \quad \forall\, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$$

Aber was hat diese Ungleichung mit der zweiten Δ-Ungl. in IC zu tun?

Am Anfang des § 2 wurde erwähnt, dass in den komplexen Zahlen auch die Ungl. $| Z_1 - Z_3 | \leq | Z_1 - Z_2 | + | Z_2 - Z_3 | \quad \forall\, Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}$ als Δ-Ungleichung bezeichnet wird.

Betrachtet man sich nun diese zweite Ungleichung für $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}$, dann sieht man, dass die Ungleichung $| Z_1 | \leq | Z_1 - Z_2 | + | Z_2 | \ \forall\, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$, einen Spezialfall der Δ-Ungl. $| Z_1 - Z_3 | \leq | Z_1 - Z_2 | + | Z_2 - Z_3 | \quad \forall\, Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}$ darstellt, wenn der Punkt $Z_3 = 0$ ist.

Die Δ-Ungl. $| Z_1 - Z_3 | \leq | Z_1 - Z_2 | + | Z_2 - Z_3 | \ \forall\, Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}$ gilt somit für ein Dreieck mit beliebigen Punkten:



Frage: Wann gilt in dieser Δ-Ungl. die Gleichheit ?

Aussage der Δ-Ungl. in den komplexen Zahlen IC

Die Δ-Ungl. $| Z_1 - Z_3 | \leq | Z_1 - Z_2 | + | Z_2 - Z_3 | \quad \forall \; Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}$
kann man in den komplexen Zahlen folgendermaßen interpretieren:

Die Summe zweier Seitenlängen in einem Dreieck ist
mindestens so groß, wie die dritte Seite des Dreiecks.

Daher rührt letztendlich auch der Name der Δ-Ungleichung.

§ 3 Anwendungsbereiche der Δ-Ungl. in der Mathematik

In der Mathematik verwendet man die Δ-Ungl. z.B. in Beweisen, um unbekannte Größen abzuschätzen. Allerdings kann man die Δ-Ungl. nur anwenden, wenn man den mathematischen Ausdruck in eine für die Δ-Ungl. anwendbare Form bringen kann. D.h. in die Form $| x + y |$ oder in die Form $| x | + | y |$.

Dann kann man abschätzen:
Wie groß der Ausdruck maximal werden kann (für $| x + y | \leq | x | + | y |$)
oder wie groß der Ausdruck mindestens sein muss. (für $| x | + | y | \geq | x + y |$)

> <u>Einschub:</u>
>
> Interpretation anhand des Absolutbetrags bzgl. der Aussage: $| x | \leq$ irgendeiner Zahl
> z.B. $| x | \leq 2$ dann liegt x maximal zw. –2 und 2

Kommen wir wieder auf die Δ-Ungl. $| x + y | \leq | x | + | y | \quad \forall \; x, y \in \mathbb{R}$ zurück.

Beispiele bzgl. der Abschätzung von mathematischen Ausdrücken:

a) Wir wollen $| a + b | + | a - b |$ nach unten abschätzen.
Nach der Δ-Ungl. gilt: $| a + b | + | a - b | \geq | 2a |$, denn:

$$\boldsymbol{| a + b | + | a - b |} \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} | (a + b) + (a - b) | = \boldsymbol{| 2a |}$$

Wir wissen nun, dass der Ausdruck $| a + b | + | a - b |$
mindestens so groß ist, wie der Ausdruck $| 2a |$.

b) Wir wollen $| a + b + c |$ nach oben abschätzen.
Zweimalige Anwendung der Δ-Ungl. liefert:

$$\boldsymbol{| a + b + c |} = | (a + b) + c | \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} | a + b | + | c | \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \boldsymbol{| a | + | b | + | c |}$$

Wir wissen nun, dass der Ausdruck $| a + b + c |$
maximal so groß ist, wie der Ausdruck $| a | + | b | + | c |$.

c) Durch geschickte Klammersetzung und Anwendung der Δ-Ungl. folgt:

$$\boldsymbol{| a - b |} = | a + (-b) | \leq | a | + | -b | = \boldsymbol{| a | + | b |}$$

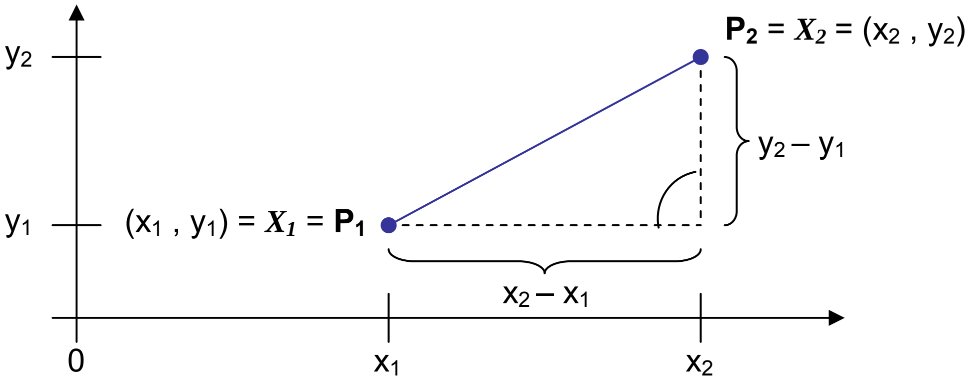
§ 4 Die Δ-Ungl. in allgemeineren Situationen und ihre Bedeutung in der Praxis

1. Berechnung der Luftlinie:

Die Berechnung der Luftlinie ist definiert als:

$$d_2(X_1, X_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$d_2(X_1 , X_2)$ beschreibt den Abstand der zwei Punkte (x_1 , y_1), (x_2 , y_2).
d_2 kann man deswegen auch schreiben als : $d_2((x_1 , y_1), (x_2 , y_2))$

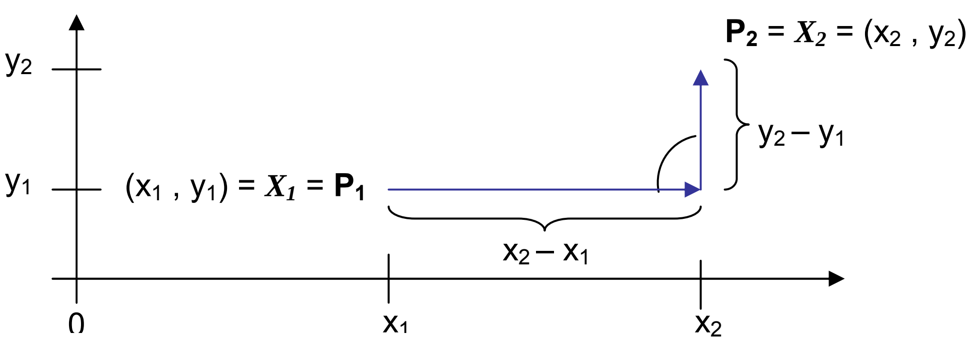


Wie in § 2 ausführlich dargestellt wissen wir, wegen der Δ-Ungleichung, dass die Strecke $P_1 P_2$ kleiner oder gleich groß ist, wie der gestrichelte Umweg. Anhand der Δ-Ungl. kann man somit sehr schön zeigen, dass die Luftlinie den kürzeren oder zumindest gleich langen Weg von P_1 nach P_2 beschreibt.

2. Der sogenannte Manhattan – Abstand:

Nicht immer ist es möglich den kürzesten Weg (Luftlinie) zu gehen.
Zum Beispiel ist man, wenn man durch eine Stadt geht meist gezwungen einen Umweg zu gehen. Diese Strecke beschreibt $d_1(X_1 , X_2)$.

Für den sog. Manhattan – Abstand gilt: $d_1(X_1 , X_2) = | x_1 - x_2 | + | y_1 - y_2 |$



3. Die unendlich Norm:

Die unendlich Norm $d\infty$ ist def. als das Maximum der Menge { I $x_1 - x_2$ I , I $y_1 - y_2$ I }

$d\infty\ (X_1, X_2)$ = max { I $x_1 - x_2$ I , I $y_1 - y_2$ I }

Def. der Abstandsfunktion d und das Besondere an d_1 , d_2 , $d\infty$:

Definition der Abstandsfunktion d :

d heißt **Abstandsfunktion** auf IR^2 wenn folgende Bedingungen gelten:

(a) d: $IR^2 \times IR^2 \rightarrow [\,0\,,\ \infty\,[$ derart, dass $\forall\ X_1, X_2, X_3 \in IR^2$:
(die folgende Δ-Ungl.) $d(X_1, X_3) \leq d(X_1, X_2) + d(X_2, X_3)$ gilt.

(b) $d(X_1, X_2) = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2$

(c) $d(X_1, X_2) = d(X_2, X_1)$

Das Besondere an d_1 , d_2 , $d\infty$:

Das Besondere an d_1 , d_2 , $d\infty$ ist, dass alle drei Abstandsfunktionen sind das bedeutet, dass alle (d_2 „die Luftlinie“, d_1„der Manhattan-Abstand“ und $d\infty$ „die unendlich Norm“) die obige Δ-Ungl. erfüllen.

Demnach gilt:

für die Definition der Luftlinie d_2

$$d_2(X_1, X_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

die Δ-Ungl.: $d_2(X_1, X_3) \leq d_2(X_1, X_2) + d_2(X_2, X_3)$,

für die Definition des Manhattan-Abstands d_1

$d_1(X_1, X_2)$ = I $x_1 - x_2$ I + I $y_1 - y_2$ I

die Δ-Ungl.: $d_1(X_1, X_3) \leq d_1(X_1, X_2) + d_1(X_2, X_3)$

und für die Definition der unendlich Norm $d\infty$

$d\infty\ (X_1, X_2)$ = max { I $x_1 - x_2$ I , I $y_1 - y_2$ I }

die obige Δ-Ungl. entsprechend.

Die Einheitskugeln von: d_1 , d_2 , $d\infty$ (in IR^n)

In diesem Abschnitt betrachten wir was passiert wenn man für die drei gegeben Abstandsfunktionen d_1 , d_2 , $d\infty$ Kugeln um den Ursprung 0 vom Radius 1 in ein Koordinatensystem einzeichnet. Das heißt wir betrachten den Wertebereich der jeweiligen Abstandsfunktion bezüglich der jeweiligen Einheitskugel.

d_2) Def. Luftlinie

$$d_2(X_1, X_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

d_1) Def. Manhattan-Abstand

$d_1(X_1 , X_2) = | x_1 - x_2 | + | y_1 - y_2 |$

$d\infty$) Def. unendlich Norm

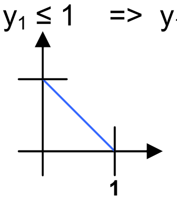
$d\infty(X_1 , X_2) = \max \{ | x_1 - x_2 | , | y_1 - y_2 | \}$

<u>Bsp. am Manhattan-Abstand d_1 :</u>

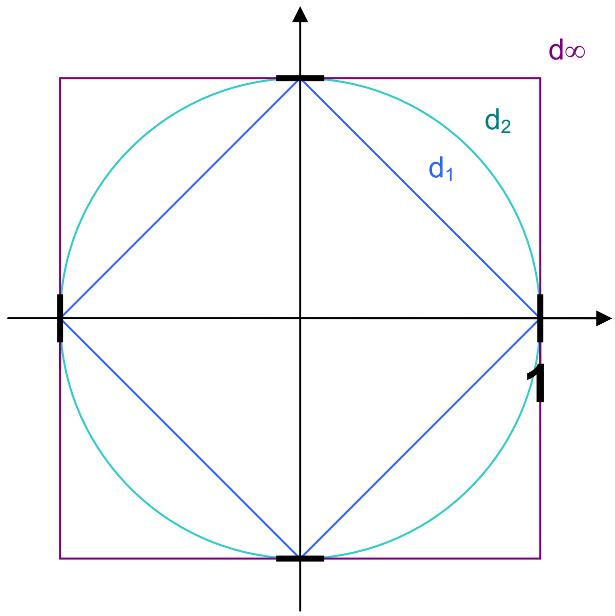
$d_1(X_1 , X_2) = | x_1 - x_2 | + | y_1 - y_2 |$ Punkt $X_2 = 0$ => $| x_1 | + | y_1 |$ Radius 1

Betrachten wir das ganze im 1.Quadranten, dann gilt: $x_1 + y_1 \leq 1$ => $y_1 \leq 1 - x_1$

Wenn man nun den Wertebereich von $y_1 \leq 1 - x_1$ betrachtet entsteht der hellblaue Teil der „Einheits-kugel“ für den 1. Quadranten. (Siehe rechte Skizze)



Für d_1 , d_2 , $d\infty$ gelten demnach die folgenden Einheitskugeln:



§ 5 Aufgaben

1.) Zeichne die Funktion f (x) = I x I für x $\in$ IR in ein Koordinatensystem.

2.) Zeige, dass aus I x – y I = 0 immer x = y folgt.

3.) Zeige, dass für alle x, y, z $\in$ IR gilt I x – z I ≤ I x – y I + I y – z I

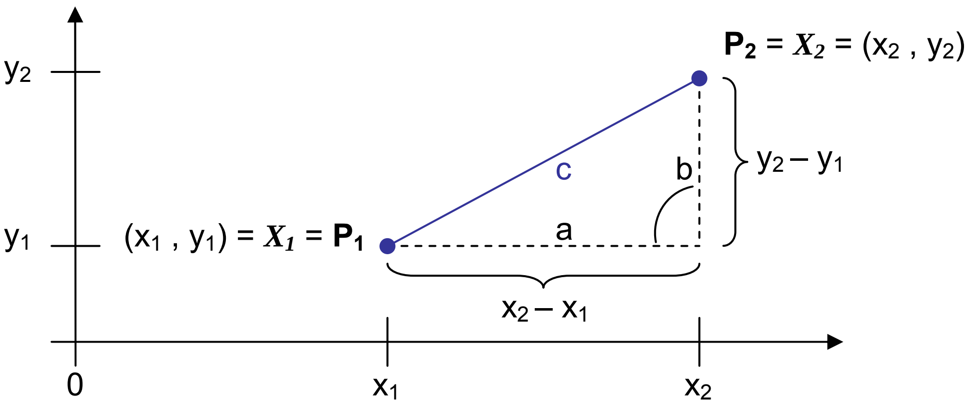
4.) Zeige für alle Zahlen x, y $\in$ IR , dass I x y I = IxIIyI
Beachte dabei, dass es für die Kombination der Vorzeichen
insgesamt vier verschiedene Möglichkeiten gibt.
x ≥ 0, y ≥ 0   x ≥ 0, y < 0   x < 0, y ≥ 0   x < 0, y < 0
Anleitung für den Fall x < 0, y < 0   zeige: IxIIyI = (-x)(-y) = x y = I x y I

5.) Zeige, dass die sog. umgekehrte Dreiecks-Ungleichung
I x – y I ≥ **I** I x I – I y I **I** für alle x, y $\in$ IR gilt.
Begründe warum man auch I x – y I ≥ I x I – I y I schreiben darf.
Erweitere zunächst I x I mit Null, d.h. I x I = I x + y – y I
und wende dies geschickt auf die Δ-Ungl. an.

6.) Zeige, dass für alle x, y $\in$ IR die folgende Ungleichung gilt:
I x I – I y I ≤ I x – y I ≤ I x I + I y I

7.) Überlege Dir, ob die Δ-Ungl. auch für n-Summanden gilt.
Erinnerung: I a + b + c I ≤ I a I + I b I + I c I (für 3 Summanden)

8.) Zu § 4 Luftlinie:



Die Abstandsfunktion d_2 ist def. als: $d_2(X_1, X_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
Zeige, dass der Pythagoras gilt.

Anmerkung: c = $d_2(X_1, X_2)$ Zeige $c = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

§ 6 Hintergrundwissen Absolutbetrag (Betrag)

Aussprache: $|x|$ „ Betrag von x “

Definition: für $x \in \mathbb{R}$

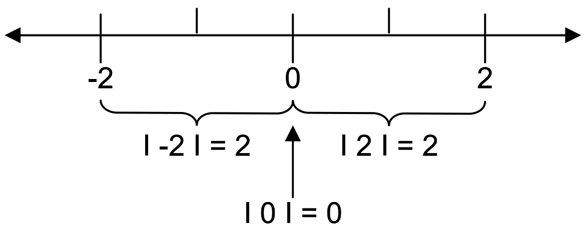
$$|x| := \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

- Wenn $x \geq 0$, dann gilt $|x| = x$
  Als Ergebnis erhält man im Fall $x \geq 0$ die (nicht negative) Zahl x.

- Wenn $x < 0$, dann gilt $|x| = -x$
  Als Ergebnis erhält man im Fall $x < 0$ eine positive Zahl größer Null.

Anschauliche Darstellung des Betrags:

Unter dem Betrag einer Zahl kann man die “Länge” dieser Zahl verstehen. D.h. Die „Länge“ einer Zahl x kann man sich auch als „Entfernung dieser Zahl x zur Null“ vorstellen. Diese Betrachtungsweise gilt wegen: $|x| = |x - 0|$.



Erläuterungen und Beispiele zum Absolutbetrag:

Die senkrechten Striche um das die Zahl x herum nennt man Betragsstriche. Betragsstriche machen den Wert, der zwischen ihnen steht nicht negativ.

Wenn der Wert zwischen den Betragsstrichen (hier das x) nicht negativ ist [d.h. $x \geq 0$], dann bleibt der Wert (das Ergebnis) nicht negativ.

Wenn der Wert zwischen den Betragsstrichen (hier das x) negativ ist [d.h. $x < 0$], dann wird der Wert positiv gemacht, d.h. das Vorzeichen ändert sich und das Ergebnis ist positiv.

Beispiele: für eine Zahl x

$|365| = 365$; $|12| = 12$; $|0| = 0$; $|-12| = -(-12) = 12$; $|-365| = -(-365) = 365$;

Anstelle von einem einzelnen x kann auch eine Funktion von x zwischen den Betragsstrichen stehen (bzw. ein von x abhängiger mathematischer Ausdruck). Wenn man den Betrag in solch einem Fall anwendet, muss man sich den mathematischen Ausdruck ggf. ganz genau anschauen, um heraus zu finden, ob er immer positiv, immer negativ ist oder das Vorzeichen ändern kann. Wenn der Ausdruck ausnahmslos (d.h. für alle x) nicht negativ ist, dann darf man per Definition die Betragsstriche (einfach) weglassen.

Beispiele: für alle $x \in IR$

$| 5x^2 | = 5x^2$
Hier darf man per Definition die Betragsstriche weglassen, da der Ausdruck $5x^2$ für jedes x (d.h. für $x < 0$; $x = 0$ und $x > 0$) immer positiv ist.

$| x^3 |$
Um den Ausdruck zu verstehen muss man ein Fallunterscheidung machen, wann $x^3 > 0$, $x^3 < 0$ und wann $x^3 = 0$ ist. Hier darf man die Betragsstriche um den Ausdruck x^3 nicht weglassen, da der Ausdruck für verschiedene x das Vorzeichen wechselt. Wenn man allerdings nur ein einzelnes bestimmtes x betrachtet, dann darf man den Betrag anwenden. Beispiel: für $x = -2$ $| -2^3 | = | -8 | = 8$

$| -5x^2 | = | 5x^2 | = 5x^2$
Hier darf man die Betragsstriche weglassen, da gilt $| x | = | -x |$ und der Ausdruck ausnahmslos nicht negativ ist.

$| -5x - 2 |$
Hier darf man die Betragsstriche ebenfalls nicht weglassen. Um den Ausdruck zwischen den Betragsstrichen zu verstehen muss man eine Fallunterscheidung machen und heraus finden für welche x der Ausdruck > 0 , < 0 oder $= 0$ ist.

Aufgaben:

1.) Für welche $x \in IR$ gilt $| 2x | \leq 15$?
Tipp: Betrachte $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$ und überlege was passiert, für $0 < x < 1$.

2.) Für welche x ist f (x) = ln (x) definiert ?

3.) Wo ist die Funktion $f(x) = \exp(|x|) = e^{|x|}$ definiert und welche Werte nimmt sie an ? Tipp: Skizze anfertigen

4.) Für welche x ist $| x - 2 | \leq 1$ (Fallunterscheidung)

5.) Für welche x ist $| x^2 - 1 | \leq 3$ (Fallunterscheidung)

Einige Eigenschaften des Absolutbetrags

Definition und Beweis der folgenden Eigenschaften:

In (A) wird bewiesen, dass die Aussage $| x | \geq 0$ gilt (allg. gültig ist).
In (B) wird gezeigt, dass aus $| x | = 0$ folgt, dass $x = 0$ ist (und umgekehrt)
In (C) wird bewiesen, dass $| x | = | -x |$ gilt.

(A) z.z.: $\mathbf{| x | \geq 0} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Aussage: Der Betrag einer Zahl x ist immer größer oder gleich Null.

Bew.:
Um diese Aussage zu beweisen, macht man eine Fallunterscheidung.
Im Fall von $x \geq 0$ ist $| x | = x$.
Im Fall von $x < 0$ gilt $| x | = -x$ und das ist eine positive Zahl, also auch größer Null.
Diese beiden Fälle zusammengenommen ergeben,
dass $| x | \geq 0$ ist, was zu beweisen war. □

(B) z.z.: $\mathbf{| x | = 0 \Leftrightarrow x = 0} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Aussage: Es ist zu zeigen, dass aus $\mathbf{| x | = 0}$ folgt $\mathbf{x = 0}$ (und umgekehrt).

Anmerkungen zum Beweisverfahren:
Bei diesem Beweis argumentiert man mittels eines sog. Umkehrschlusses. Dabei betrachtet man in diesem Fall nicht was passiert, wenn $x = 0$ ist, sondern (was passiert) wenn $x \neq 0$ ist. Im Laufe des Beweises kann man dann zeigen, dass aus $| x | = 0$ ausschließlich $x = 0$ folgt, indem man alle anderen Möglichkeiten ausschließt.

Bew.:
Was passiert nun wenn $x \neq 0$ ist
Da $x \neq 0$ einerseits $x > 0$, andererseits $x < 0$ bedeuten kann, betrachtet man diese getrennt voneinander. Sowohl bei $x > 0$ als auch bei $x < 0$ folgt aus der Definition des Betrags, dass $| x | > 0$ ist.
Aus der Definition des Betrags und aus der Erkenntnis, dass keine Zahl $x \neq 0$ als Ergebnis $| x | = 0$ annehmen kann (da $| x | > 0$ bei $x \neq 0$ ist) folgt, dass $x = 0$ ist (sein muss), wenn $| x | = 0$ ist.
Umgekehrt kann man nun zeigen, dass aus $x = 0$ folgt, dass $| x | = 0$ ist.

=> $| x | = 0 \Leftrightarrow x = 0$ gilt $\forall x \in \mathbb{R}$, was zu beweisen war. □

(C) z.z.: **$|x| = |-x|$** $\forall x \in$ IR

<u>Bew.:</u>

Um zu beweisen, dass $|x|$ das Gleiche ist, wie $|-x|$
bedient man sich der Fallunterscheidung.

1. Fall:
Annahme: $x < 0$
Per Definition gilt: $|x| = -x$ (da $x < 0$)
Wenn $x < 0$, dann ist $-x > 0$
Per Definition gilt: $|-x| = -x$ (da $x > 0$)
Aus $|x| = -x$ und $|-x| = -x$ (bei Ann. $x < 0$) folgt $|x| = |-x|$

2.Fall:
Annahme: $x > 0$
Per Definition gilt: $|x| = x$ (da $x > 0$)
Wenn $x > 0$, dann ist $-x < 0$
Per Definition gilt: $|-x| = -x$ (da $x < 0$)
Aus $|x| = x$ und $|-x| = -x$ (bei Ann. $x > 0$) folgt $|x| = |-x|$

3. Fall:
Annahme $x = 0$ und per Definition gilt: $|0| = 0$
Per Definition gilt: $|x| = x = 0$ (da $x = 0$)
Wenn $x = 0$, dann ist auch $-x = 0$
Per Definition gilt: $|-x| = x = 0$ (da $x = 0$)
Aus $|x| = x = 0$ und $|-x| = x = 0$ (bei Ann. $x = 0$) folgt $|x| = |-x|$

Da für $x < 0$, $x > 0$ und $x = 0$ gilt dass $|x| = |-x|$
ist die Behauptung $|x| = |-x|$ für alle $x \in$ IR bewiesen. □

§ 7 Ausführlicher Beweis der Δ-Ungl. (in IR)

Def.: $|x + y| \leq |x| + |y|$ **für x, y ∈ IR**

z.z. $|x + y| \leq |x| + |y|$ für alle x, y ∈ IR (Δ-Ungl. in IR)

Bew.:

Um die Δ-Ungl. zu beweisen zeigt man zunächst,
dass $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$ und analog dazu $y \leq |y|$, $-y \leq |y|$ gilt.

z.z. $\mathbf{x \leq |x|}$ (analog $y \leq |y|$)

Die Ungleichungen ($x \leq |x|$ und $y \leq |y|$) werden mittels Fallunterscheidung bewiesen. In diesem Rahmen wird nur der Beweis von $x \leq |x|$ gezeigt.

Beweis:

1. Fall Wenn $x \geq 0$, dann gilt per Definition $|x| = x$.

2. Fall Wenn $x < 0$, dann gilt per Definition $|x| = -x$.
Im 2. Fall (mit der Voraussetzung $x < 0$) ist das Ergebnis immer eine positive Zahl größer Null. Daraus folgt, dass $|x| > 0$ ist.
Es gilt: $x < 0$ und $0 < |x|$
(daraus folgt) => $x < 0 < |x|$ (daraus folgt) => $x < |x|$

Wenn man nun die Erkenntnisse aus beiden Fällen zusammen betrachtet hat man die obige Ungleichung (Behauptung), dass $x \leq |x|$ gilt, bewiesen.
D. h. aus den Bedingungen $|x| = x$ (bei $x \geq 0$) und $|x| > 0$ (bei $x < 0$) folgt $x \leq |x|$, was zu zeigen war.

z.z. $\mathbf{-x \leq |x|}$ (analog $-y \leq |y|$)
In diesem Rahmen wird nur bewiesen, dass $-x \leq |x|$ ist.

Beweis:

Um zu zeigen, dass $-x \leq |x|$ gilt, nimmt man die gerade eben bewiesene Ungleichung $x \leq |x|$ zur Hilfe. Nun ersetzt man in dieser Ungleichung x durch -x und erhält $-x \leq |-x|$.

Wir wissen es gilt $|-x| = |x|$. Diese Eigenschaft des Absolutbetrags wenden wir nun auf $-x \leq |-x|$ an und haben damit bewiesen, dass $-x \leq |x|$ ist.

Nachdem bewiesen wurde, dass die Ungleichungen $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$ und analog dazu $y \leq |y|$, $-y \leq |y|$ gelten, werden diese Ungleichungen addiert.

- Aus der Addition von $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ folgt die Ungl. $x + y \leq |x| + |y|$.

- Aus der Addition von $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$ folgt die Ungl. $-x -y \leq |x| + |y|$.
  Die Ungl. $-x -y \leq |x| + |y|$ kann man auch so schreiben: $-(x + y) \leq |x| + |y|$.

Betrachtet man nun die erhaltenen Ungleichungen
$x + y \leq |x| + |y|$ und $-(x + y) \leq |x| + |y|$,
dann ergeben diese zusammengenommen
die Δ-Ungleichung: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Anmerkung:
Wenn sowohl $x + y$, als auch $-(x + y) \leq |x| + |y|$ ist, dann ist es dasselbe, wie wenn man schreibt, dass $|x + y| \leq |x| + |y|$, da der Betrag so definiert ist.

=> $|x + y| \leq |x| + |y|$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ □

§ 8 Abkürzungen:

Δ-Ungl.	Dreiecks-Ungleichung
Ungl.	Ungleichung
Betrag	Absolutbetrag
Bew.	Beweis
Def.	Definition
Ann.	Annahme
geom.	geometrisch
bzgl.	bezüglich
def.	definiert
allg.	allgemein
sog.	sogenannt
z.z.	zu zeigen
IR	die reellen Zahlen
IC	die komplexen Zahlen
∀	für alle
∈	Element von / Element aus
□	zeigt an, dass der Beweis abgeschlossen ist / geführt wurde
=>	daraus folgt (nur in eine Richtung) z.B. a => b Bedeutung: aus a folgt b (keine Umkehrung der Aussage)
⇔	daraus folgt (in beide Richtungen) z.B. a ⇔ b Bedeutung: aus a folgt b und aus b folgt a

§ 9 Quellenangaben

Bücher:

Analysis 1 (Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen) 6. Auflage
Autor: Otto Forster Verlag: vieweg ISBN: 3-528-57224-8

Analysis Band 1 (Ein Lehrbuch für den sanften Wechsel von der Schule zur Uni)
Autor: Ehrhard Behrends Verlag: vieweg ISBN: 3-528-03119-9

Weitere Unterlagen:

Proseminar-Unterlagen aus dem Proseminar I von Prof. Roch (TUD)

Unterlagen aus der Vorlesung Analysis 1 von Prof. Streicher (TUD)

§ 10 Index:

§ 1 Beweis der Dreiecks-Ungleichung in IR

§ 2 Warum man diese Ungleichung als Δ-Ungl. bezeichnet

§ 3 Anwendungsbereiche der Δ-Ungl. in der Mathematik

§ 4 Die Δ-Ungl. in allgemeineren Situationen
und ihre Bedeutung in der Praxis

§ 5 Aufgaben

§ 6 Hintergrundwissen Absolutbetrag (Betrag)

§ 7 Ausführlicher Beweis der Δ-Ungl. (in IR)

§ 8 Abkürzungen

§ 9 Quellenangaben

§ 10 Index