Mittelwerte

Sarah Kirchner & Thea Göllner

Mittelwerte sind verschiedene mathematisch definierte Kenngrößen.
Unter dem Mittelwert zweier oder mehrerer Zahlen versteht man meistens den Durchschnitt, obwohl viele andere Mittelbildungen vorkommen.
Wir werden uns mit dem **arithmetischen Mittel (*AM*)**, dem **geometrischen Mittel (*GM*)**, dem **harmonischen Mittel (*HM*)** und dem **quadratischen Mittel (*QM*)** beschäftigen.
Diese vier Mittelwerte ergeben sich aus der verallgemeinerten Formel für Mittelwerte.

<u>Verallgemeinerter Mittelwert</u>

$\sqrt[p]{\frac{a_1{}^p + a_2{}^p + a_3{}^p + \ldots + a_n{}^p}{n}}$ ist das p. Mittel $\qquad a_i \geq 0$

Es gilt: p. Mittel ≤ *q*. Mittel für alle *p* ≤ *q*

AM: $p = 1$

HM: $p = -1$

QM: $p = 2$

GM: $p \rightarrow 0$ Lässt man p in der verallgemeinerten Formel gegen 0 laufen, also $\lim_{p \to 0} \sqrt[p]{\frac{a_1{}^p + a_2{}^p + a_3{}^p + \ldots + a_n{}^p}{n}}$, erhält man das Geometrische Mittel.

Arithmetisches Mittel

Das arithmetische Mittel (auch Durchschnitt) ist das am häufigsten verwendete Mittel. Will man das arithmetische Mittel von zwei bzw. *n* Zahlen bilden, addiert man diese und teilt sie durch zwei bzw. durch *n*.

$$\frac{a+b}{2} \qquad\qquad \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

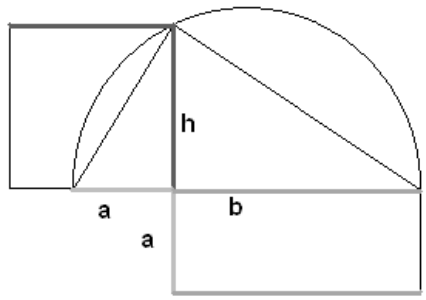
Anwendungsbeispiel: mündliche Note: 10 Punkte

schriftliche Note: 6 Punkte

Endnote: $\frac{10+6}{2} = 8$ Punkte

Geometrisches Mittel

$$\sqrt{a \cdot b} \qquad\qquad \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$$



Konstruktion für zwei Zahlen: Finde ein Quadrat mit dem gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck mit den Seitenlängen *a* und *b*. Nach dem Höhensatz ist dies das Quadrat mit der Seitenlänge *h*, denn im rechtwinkligen Dreieck gilt $h^2 = ab$. Also ist das geometrische Mittel von *a* und *b* hier *h*.

Das Geometrische Mittel wird in der Zinsrechnung benutzt. Wenn ein Kapital ein Jahr lang mit 3%, im nächsten Jahr mit 7% verzinst wird. Wie hoch ist dann die durchschnittliche Verzinsung?

Es gilt: nach dem ersten Jahr 103% vom Anfangskapital, nach dem zweiten Jahr 107% vom Kapital des Vorjahres, also $K_2 = K_0 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}07$.

Die durchschnittliche Verzinsung beträgt x mit $x^2 = 1{,}03 \cdot 1{,}07$.

$\Rightarrow \sqrt{1{,}03 \cdot 1{,}07} = 1{,}0498$. Die durchschnittliche Verzinsung beträgt 4,98%.

Harmonisches Mittel

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \qquad \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

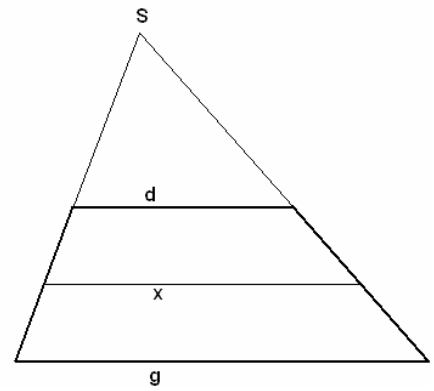
Eine Durchschnittsgeschwindigkeit kann man mit dem harmonischen Mittel ausrechnen:
Ein Autofahrer legt eine Strecke mit 80km/h zurück und anschließend eine Strecke gleicher Länge mit 120km/h zurück. Ist s Die Länge der ersten und zweiten Strecke in km und v die Mittlere Geschwindigkeit über die gesamte Strecke (=2*s*) so gilt:

$$\frac{s}{80km/h}+\frac{s}{120km/h}=\frac{2s}{v} \Rightarrow v=\frac{2s}{\frac{s}{80km/h}+\frac{s}{120km/h}}=\frac{2}{\frac{1}{80}+\frac{1}{120}}km/h=96km/h$$

Quadratisches Mittel

$$\sqrt{a^2+b^2} \qquad \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}$$

Auch hier ein Anwendungsbeispiel: Will man ein Trapez mit einer Parallelen zur Grundseite *g* in zwei gleichgroße Flächen teilen, geht man folgendermaßen vor:



Man bezeichnet die Flächeninhalte der Dreiecke mit der Spitze S und den Grundseiten g, x und d mit A_g, A_x und A_d. Mit dem Strahlensatz folgt: $A_g : A_x : A_d = g^2 : x^2 : d^2$

Da $A_g - A_x = A_x - A_d \Rightarrow A_x = \frac{A_d + A_g}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{d^2 + g^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{d^2 + g^2}{2}}$

Die Länge der gesuchten Strecke ist also das Quadratische Mittel aus g und d.

<u>Zwischen diesen Mitteln gilt folgende Ungleichungskette:</u>

HM ≤ GM ≤ AM ≤ QM

Wir beweisen dies nun für je 2 Zahlen $a, b > 0$ in 3 Schritten. Auf der linken Seite stehen die Rechnungen zu den 3 einzelnen Ungleichungen. Einen Beweis muss man aber in die andere Richtung führen, denn man muss von etwas Bekanntem auf das zu Beweisende schließen. In unserem Fall ist das Bekannte $(a-b)^2 \geq 0$. Deshalb stehen rechts daneben die dazugehörigen Beweise in richtiger Richtung.

HM ≤ GM

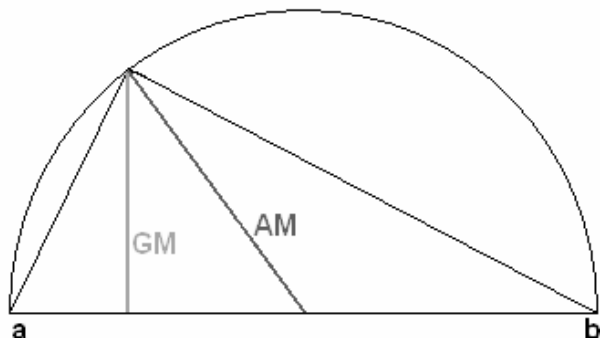
Fehler! Es ist nicht möglich, durch die Bearbeitung von Feldfunktionen Objekte zu erstellen. $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$	$\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$	$0 \leq (a-b)^2$	
$2 \leq \sqrt{ab}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$		$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$	$+2ab$
$2 \leq \frac{\sqrt{ab}}{a} + \frac{\sqrt{ab}}{b}$	$a = \sqrt{a^2}$ $b = \sqrt{b^2}$	$2ab \leq b^2 + a^2$	
$2 \leq \sqrt{\frac{ab}{a^2}} + \sqrt{\frac{ab}{b^2}}$		$2ab \leq \frac{b^2 a}{a} + \frac{a^2 b}{b}$	$:ab$
$2 \leq \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$	$(\ )^2$	$2 \leq \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$	$+2$
$4 \leq \left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$		$4 \leq \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 2$	$2 = 2\cdot 1 = 2\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{a}{b}}$

$4 \le \frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{a}{b}$		$4 \le \frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{a}{b}$	
$4 \le \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 2$	-2	$4 \le \left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$	$\sqrt{(\ )}$
$2 \le \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$	$\cdot ab$	$2 \le \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$	
$2ab \le \frac{b^2a}{a} + \frac{a^2b}{b}$		$2 \le \sqrt{\frac{ab}{a^2}} + \sqrt{\frac{ab}{b^2}}$	$\sqrt{a^2} = a$ $\sqrt{b^2} = b$
$2ab \le b^2 + a^2$	$-2ab$	$2 \le \frac{\sqrt{ab}}{a} + \frac{\sqrt{ab}}{b}$	
$0 \le a^2 - 2ab + b^2$		$2 \le \sqrt{ab} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$	$:\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$
$0 \le (a-b)^2$		$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$	

GM ≤ AM

$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$	$\cdot 2$	$0 \le (a-b)^2$	
$2\sqrt{ab} \le a + b$	$(\ )^2$	$0 \le a^2 - 2ab + b^2$	$+4ab$
$\left(2\sqrt{ab}\right)^2 \le (a+b)^2$		$4ab \le a^2 + 2ab + b^2$	
$4ab \le a^2 + 2ab + b^2$	$-4ab$	$\left(2\sqrt{ab}\right)^2 \le (a+b)^2$	$\sqrt{(\ )}$
$0 \le a^2 - 2ab + b^2$		$2\sqrt{ab} \le a + b$	$:2$
$0 \le (a-b)^2$		$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$	

Die Ungleichung zwischen dem Arithmetischen und dem Geometrischen Mittel kann man auch mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen:



AM* ≤ *QM

$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	$(\ )^2$	$0 \leq (a-b)^2$	
$\frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$		$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$	$+2ab$
$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$	$\cdot 4$	$2ab \leq a^2 + b^2$	$+(a^2+b^2)$
$a^2+2ab+b^2 \leq 2(a^2+b^2)$	$-(a^2+b^2)$	$a^2+2ab+b^2 \leq 2(a^2+b^2)$	$:4$
$2ab \leq a^2+b^2$	$-2ab$	$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$	
$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$		$\frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$	$\sqrt{(\ )}$
$0 \leq (a-b)^2$		$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	

<u>Beweisen von anderen Ungleichungen</u>

Mit Hilfe der Mittelwertungleichungen kann man verschiedene andere Ungleichungen beweisen. Hier drei Beispiele:

<u>Aufgabe1:</u> Zeige, dass $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ für $a,b,c \geq 0$ gilt.

Lösung:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geq abc$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \geq abc$$

Aus der *AM-GM* Ungleichung folgt

$$AM \geq GM$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca} = \sqrt{a^2b^2c^2} = abc.$$

Somit ist gezeigt, dass die Ungleichung gilt.

Aufgabe 2: Zeige, dass $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ gilt.

Lösung:

Benutze die *QM-GM* Ungleichung.

$QM \geq GM$

$1. \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

$2. \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} \geq \sqrt{bc} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{2} \geq bc \Rightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc$

$3. \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} \geq \sqrt{ca} \Rightarrow \frac{c^2 + a^2}{2} \geq ca \Rightarrow c^2 + a^2 \geq 2ca$

Benutze dies für die Lösung der Ungleichung.

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$

$\Leftrightarrow 2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \geq 2 \cdot (ab + bc + ca)$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Auch diese Ungleichung ist hiermit bewiesen.

Aufgabe 3: Zeige, dass $a^4(1 + b^4) + b^4(1 + c^4) + c^4(1 + a^4) \geq 6a^2b^2c^2$ gilt.

Lösung:

$a^4(1 + b^4) + b^4(1 + c^4) + c^4(1 + a^4) = a^4 + a^4b^4 + b^4 + b^4c + c^4 + c^4a^4$

Wir haben 6 Summanden. Teilt man diese durch 6 erhält man ihr Arithmetisches Mittel.

$\frac{6 \ Summanden}{6} \Rightarrow AM$

$\frac{a^4 + a^4b^4 + b^4 + b^4c + c^4 + c^4a^4}{6}$

Aus der *AM-GM* Ungleichung folgt

$AM \geq GM$

$\frac{a^4 + a^4b^4 + b^4 + b^4c^4 + c^4 + c^4a^4}{6} \geq \sqrt[6]{a^4 \cdot (a^4b^4) \cdot b^4 \cdot (b^4c^4) \cdot c^4 \cdot (c^4a^4)}$

$\Leftrightarrow \frac{a^4 + a^4b^4 + b^4 + b^4c^4 + c^4 + c^4a^4}{6} \geq \sqrt[6]{a^{12} \cdot b^{12} \cdot c^{12}} = a^{\frac{12}{6}} \cdot b^{\frac{12}{6}} \cdot c^{\frac{12}{6}} = a^2b^2c^2$

$\Leftrightarrow a^4(1 + b^4) + b^4(1 + c^4) + c^4(1 + a^4) \geq 6a^2b^2c^2.$

Lektüre für Interessierte: kleiner Duden Mathematik, Dudenverlag, 2. Auflage

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/mittel.htm

http://de.wikipedia.org/wiki/Mittelwert