DAS MUSEUMSWÄCHTERPROBLEM

bearbeitet von

Claudia Goltz
Till Weigt
Uwe Siebert
Johanna Soava

im Rahmen des

PROSEMINAR I

WS 04/05

bei Prof. Roch

DAS MUSEUMSWÄCHTERPROBLEM

Ein lauter herzzerreißender Schrei, gefolgt von schnellem, japsähnlichem Atmen. Schnelle Schritte, die das knarrende Parkett entlang die Treppe förmlich herunterfliegen. Für einen Moment Totenstille……., dann ein Klicken…….. und mit dem Licht die Erleichterung.
Es war wieder nichts passiert, rein gar nichts. Nur die Phantasie hatte wieder ihre Umtriebe mit dem armen Museumsdirektor gespielt, wie es in letzter Zeit immer häufiger vorkam. Das war auch kein Wunder, denn sein kleines Museum entwickelte sich langsam zu einer Fundgrube für Diebe. Immer mehr wertvolle Bilder wurden seiner Obhut anvertraut. Nur wurden ihm nicht die nötigen Gelder für die Überwachung zur Verfügung gestellt. Sollten ihn diese paar Bilder in den Wahnsinn treiben und in den finanziellen Ruin stürzen…….!?! Seit Wochen konnte er nicht mehr richtig schlafen. Ein Auge geschlossen, eines offen, wie ein Hund fühlte er sich. Bereits vergessen war der Stolz über das Wachstum seines kleinen Museums. Was brachte ihm der Stolz, wenn er nicht mal mehr schlafen konnte? Das war ein sehr hoher Preis, dachte er sich, ging resigniert in sein Schlafzimmer und versuchte noch ein paar Stunden zu schlafen, doch daran war nun nicht mehr zu denken.
In dem Moment klopfte es an die Tür und sein Sohn trat ein. Es war nicht die erste Nacht, in der ihm sein Vater durch seine Unruhe um halb vier Uhr morgens den Schlaf raubte. Nun reichte es ihm, er wolle "verdammt noch mal" die Ursache der ständig zunehmenden Unruhe wissen, stellte er seinen Vater zur Rede.
Doch umso verzweifelter der Vater sein Leid klagte, umso breiter wurde das Grinsen auf dem Gesicht seines Sohnes.
Der Sohn, der in seinem Mathematikstudium schon recht weit fortgeschritten war, setzte dem Vater nun auseinander, dass es gar nicht teuer wäre, sein Museum Tag und Nacht überwachen zu lassen. Dies könnte er durch geschicktes Aufstellen von Kameras erreichen.

Nun setzte der Sohn seinem Vater die Rahmenbedingungen auseinander, um den Kostenaufwand für eine optimale Überwachung zu minimieren.

1. <u>Die Rahmenbedingungen:</u>

- Eine Kamera hat ein 360°-Auge, d.h. sie kann zur gleichen Zeit rundum gucken.
- Das Museum hat *n* Ecken und nur eine Etage.
- Die Außenmauern des Museums überschneiden sich nicht, d.h. das Museum ist im Prinzip ein großer, wenn auch verwinkelter Raum.

Eine Kamera kann immer nur einen Teil des Museums überwachen, in dem es keine Verwinkelungen gibt, die ihre Sicht versperren. Ein solcher Teil wäre ein Dreieck: Dort kann eine Kamera alles sehen. Bei einem Vier- oder Mehreck kann das zwar auch so sein, aber im Gegensatz zum Dreieck sind da Verwinkelungen nicht mehr ausgeschlossen:

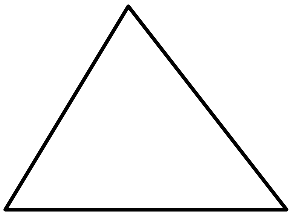


Abbildung 1

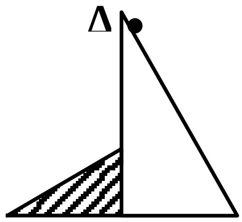


Abbildung 2

Das sieht man auch in Abbildung 2: Eine Kamera in Punkt A kann die schraffierte Ecke nicht filmen. Beim Dreieck ist die Positionierung der Kamera egal, es kann von jeder Ecke aus ganz eingesehen werden.

Wenn wir wissen wollen, wie viele Kameras auf jeden Fall ausreichen, um ein Museum zu überwachen, müssen wir es also in Dreiecke aufteilen. Das nennt man auch Triangulierung oder Triangulation.

2. Die Triangulierung:

Wie sieht eine solche Triangulierung aus? Und gibt es sie für jedes Vieleck?
Einfach gesagt schneidet man von seinem Vieleck von außen immer Dreiecke ab:

Bild 1

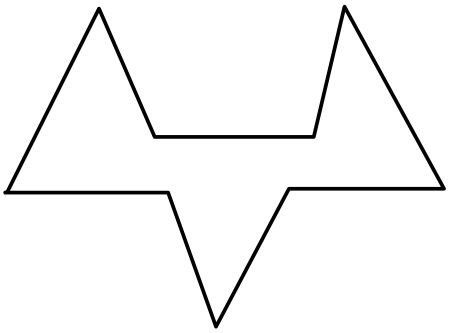


Bild2

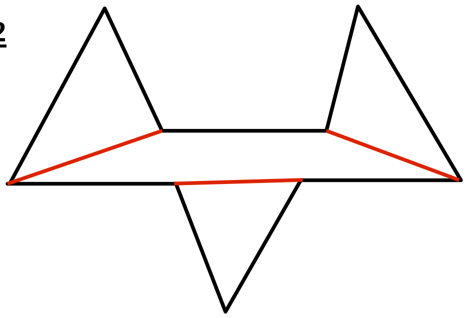


Bild 3

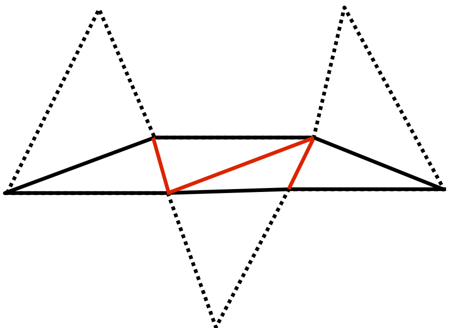


Bild 4

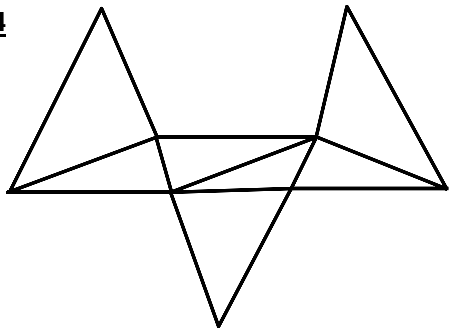


Bild 1 zeigt ein Neuneck, das wir nun beispielhaft triangulieren. In Bild 2 werden die drei Zacken unseres Neunecks „abgeschnitten“ (erkennbar an den roten Linien). Wichtig dabei ist, dass diese Linien immer nur von einem Eckpunkt des Neunecks zu einem anderen Eckpunkt gezogen werden können! Das ändert sich auch in Bild 3 nicht, wo die bereits „abgeschnittenen“ Ecken durch gestrichelte Linien gekennzeichnet sind. Mit dem übrig gebliebenen Vieleck verfahren wir wieder wie

zuvor: Wir schneiden die zwei Zacken ab (rote Linien). Der übrig gebliebene Teil ist ein Viereck, er wird in zwei Dreiecke zerlegt.
Bild 4 zeigt das fertig triangulierte Neuneck. Unsere Triangulierungslinien haben als Anfangs- und Endpunkt immer Eckpunkte des Neunecks.

Es gibt mehr als eine Möglichkeit, ein Vieleck in Dreiecke aufzuteilen, bei einem bestimmten Vieleck müssen es aber immer gleich viele Dreiecke sein, aus denen es zum Schluss besteht. Bei unserem Beispiel wird das Neuneck immer in 7 Dreiecke zerlegt. Allgemein gilt: Ein n-Eck kann in (n-2) Dreiecke zerlegt werden. Das kann man mit Induktion beweisen, wollen wir hier aber nicht machen. Es zu wissen ist natürlich hilfreich, weil man nachzählen kann, ob man sein Vieleck korrekt zerlegt hat.

Kann man denn jedes Vieleck triangulieren? Denn das müssen wir sicherstellen. Die Antwort ist ja, aber das müssen wir erst mal beweisen. Dafür gehen wir zunächst vom einfachsten Fall aus: Unser Vieleck soll ein Dreieck sein. Dann sind wir fertig, denn es besteht ja schon aus Dreiecken, wenn auch aus einem einzigen. Jetzt argumentieren wir mit dem Prinzip der vollständigen Induktion: Wir wissen, dass es für ein 3-Eck funktioniert, und behaupten jetzt, dass es für ein n-Eck funktioniert. Wenn es für den Nachfolger, also ein n+1-Eck ebenfalls funktioniert, gilt es für jedes Vieleck, weil wir dann ja immer den Nachfolger von einem Vieleck betrachten können, bei dem es schon funktioniert hat.
Wie können wir nun beweisen, dass sich ein n+1- Eck triangulieren lässt?
Wir nehmen an, dass sich ein n-Eck triangulieren lässt (und alle Vielecke mit weniger als n Ecken auch). Dann betrachten wir das n+1-Eck. Wenn wir dieses n+1-Eck in zwei Teile zerlegen, also einmal durchschneiden, wissen wir: Die beiden Hälften haben beide weniger als n+1 Ecken. Das heißt, wir können sie in Dreiecke zerlegen und damit besteht unser n+1-Eck aus den ganzen kleinen Dreiecken zusammen.

Damit wäre bewiesen, dass wir jedes Museum in Dreiecke zerlegen können. Klar ist, dass eine Kamera ein Dreieck überwachen kann. Aber wie verteilen wir die Kameras?

Um eine Antwort auf diese Frage, sowie eine Optimierung der Kameraanzahl zu erhalten verwenden wir ein Verfahren, das auf Färbung beruht.

3.<u>Die Färbung:</u>

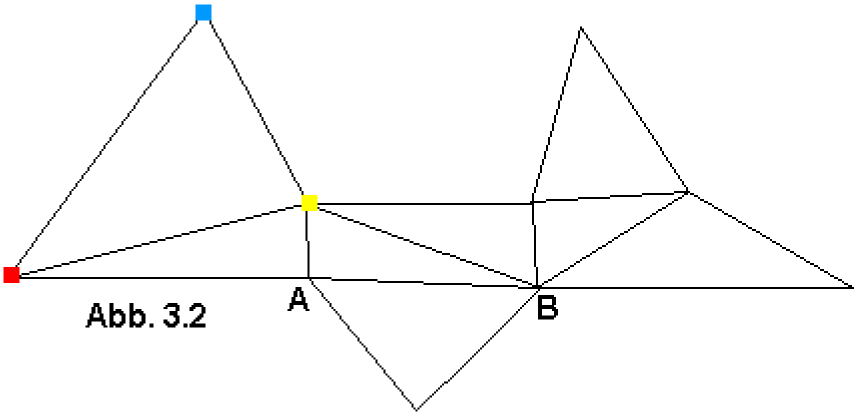
<u>Allgemeine Vorgehensweise:</u>

Zunächst soll die allgemeine Vorgehensweise erläutert werden. Auf den folgenden Seiten wird schließlich erläutert, wie die Einfärbung in unserem konkreten Fall vorgenommen werden muss. Der Anfang bildet hierbei erst das Einfärben der Ecken eines der Dreiecke in drei unterschiedliche Farben. Diese Ecken stehen stellvertretend für die drei Seiten. Was man sich in diesem Zusammenhang am besten noch einmal klar macht ist, dass jedes Vieleck (Polygon) genauso viele Seiten hat wie Ecken. Dies lässt sich recht einfach beweisen, für unsere Betrachtung nehmen wir es jedoch einfach ohne Beweis an. In den weiteren Schritten werden wir alle Eckpunkte der weiteren Dreiecke mit drei unterschiedlichen Farben kolorieren, bis alle Ecken eine Farbe erhalten haben. Eine Frage die es aufkommt ist, ob dies bei jedem Vieleck einfach möglich ist. Die klare Antwort hierauf ist ja. Dies werden wir sogleich mittels Induktion beweisen. Unser Induktionsanfang und Beweisverfahren ist analog zu dem der Triangulation. Zuerst schauen wir auf ein Vieleck mit der Seitenanzahl $n = 3$, also einem Dreieck. Hier ist der Fall trivial, denn drei Ecken in drei unterschiedlichen Farben zu färben ist klar möglich. Nun gehen wir im Induktionsschritt davon aus, dass dies auch für ein beliebige Vielecke von n=3 bis n Ecken möglich ist und wollen auf den Fall n+1 schließen. Wir bedienen uns wie oben dem einfachen Trick, eine Diagonale durch das Vieleck zu ziehen, die das Vieleck in zwei Teile mit jeweils nicht mehr als n Ecken teilt. Nach Induktionsvoraussetzung lassen sich beide Vielecke nach dem oben erwähnten Schema einfärben. Das einzige Problem, das entstehen könnte ist, dass an der Diagonalen Farbüberschneidungen entstehen, die durch Umfärben eines Vielecks behoben werden können, indem wir die Farben der Ecken einfach "weiterschieben".

Einfärbung des Vielecks

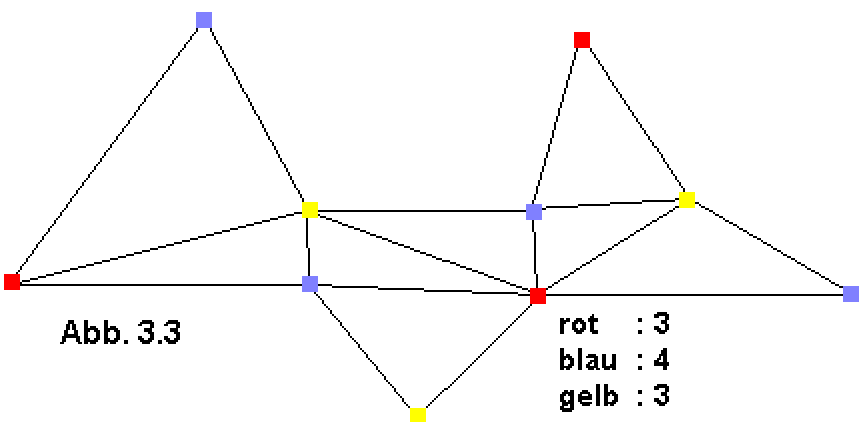
1.Schritt

Wir wählen uns nun eines der Dreiecke aus und färben dessen Ecken in drei Farben (hier: rot, gelb und blau vgl. Abb.3.2).Von diesem Dreieck ausgehend, lassen sich nun



die restlich Farben der Ecken bestimmen, indem wir die drei Ecken aller Dreiecke in den drei gewählten Farben einfärben. So nehmen wir hier als Beispiel das Dreieck, das durch die rote, gelbe und der Ecke A gebildet wird. Folglich wird die Ecke A blau eingefärbt. Hieraus folgt, dass Ecke B die Farbe rot erhält usw.

2.Schritt



Nachdem wir auf diese Art und Weise die Farben der restlichen Dreiecke bestimmt haben, erhalten wir ein bunt gefärbtes Vieleck (Abb. 3.3). Nun können wir nachzählen und erkennen, dass die Farben rot und gelb dreimal verwendet wurden und die Farbe blau viermal. Somit wurden rot und gelb seltener verwendet als blau, was für uns bedeutet, dass unser Hauptaugenmerk auf diesen beiden Farben liegt. Diese beiden Farben geben uns nun eine Idee, wo wir unsere Kameras positionieren müssen und wie viele, um das komplette Museum zu überwachen, nämlich an allen Ecken, die entweder rot, oder in diesem Fall gelb gefärbt sind. Aber ist dies wirklich die günstigste Möglichkeit? Diese Frage soll nun im nächsten Teil, der Optimierung geklärt werden.

Optimierung

In diesem Teil soll nun die Frage nach der tatsächlichen, günstigsten Möglichkeit der Kameraanzahl, bei vorliegendem Vieleck, geklärt werden. Wir müssen nun schauen, ob nicht das Blickfeld einer Kamera durch das einer anderen abgedeckt werden kann. Schauen wir uns z.B. die Abbildung 3.3 abermals an, so lässt sich feststellen, dass das Blickfeld der Kamera an der Ecke C durch das der anderen beiden Kameras an den gelben Ecken abgedeckt wird, so dass im Endeffekt zwei Kameras genügen um dieses Vieleck zu überwachen. Ein Problem das sich vielleicht schon etwas früher aufdrängt, ist die Frage nach der Anzahl der Kameras, die auf jeden Fall ausreichend sind, um ein *n*-Eck, bei ungünstigster Verwinkelung zu überwachen. Der ungünstigste Fall ist hierbei, wenn wir nicht, wie oben, Kameras weglassen können. Dies soll jedoch der nächste Abschnitt erläutern.

Anzahl der auf jeden Fall ausreichenden Kameras

Die Anzahl der auf jeden Fall ausreichenden Kameras in Abhängigkeit der Eckanzahl *n* ist recht einfach. Wenn wir nun unsere Färbung betrachten, so haben wir drei Farben, a, b und c, mit $a + b + c = n$. Des weiteren gilt $a <= b <= c$ ("<=" entspricht "kleiner gleich"). Daraus folgt, dass $3a <= n$, also $a <= n/3$. Somit ist a, die Anzahl der zu installierenden Kameras = $n/3$ abgerundet, da a, b, c und *n* Element der natürlichen Zahlen sind.

Quellenangaben downgeloadet am 26.01.2005

http://zeus.zeit.de/text/archiv/2002/25/200225_buch_big_brother.xml
www.inf.fu-berlin.de/lehre/ SS03/alg_geometrie/triangulationbunt_2.pdf
www.inf.fu-berlin.de/lehre/SS03/ alg_geometrie/script_abgabe_aktuell.pdf