03.03.2004

Erforderliche Kenntnisse: Keine

Farben:

Beweisen mit Buntstiften

Die meisten dieser Probleme stammen aus dem Buch „Problem Solving Strategies“ von A. Engel; Springer-Verlag New York, Inc..

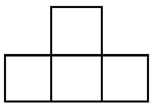
Hintergrund:

Viele auf den ersten Blick scheinbar unlösbare Probleme – aus schwierigen Mathewettbewerben ebenso wie aus leichteren Rätselheften – lassen sich durch geschicktes mehrfarbiges Anmalen, beispielsweise von Punkten oder Spielfeldern, plötzlich einfach und anschaulich lösen.

Beispiel:

T-Stein-Problem

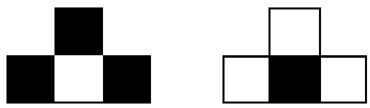
Kann ein 10 x 10 Schachbrett mit folgenden T-Steinen ausgelegt werden?



Lösung

Zur Lösung des Problems färbe man das Schachbrett zunächst abwechselnd schwarz und weiß ein.

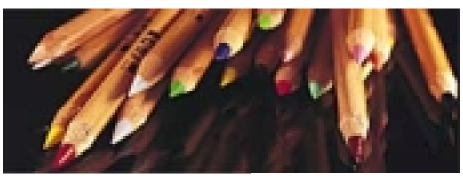
Auch die Steine werden im gleichen Muster eingefärbt.



Wie man sieht, bedeckt ein Stein immer 3 Felder der einen und ein Feld der anderen Farbe.

Das Schachbrett besteht nach dem Einfärben aus 50 schwarzen und 50 weißen Feldern. Mit einem Stein werden vier Felder überdeckt, man braucht also 25 Steine. Da man aber von beiden Steintypen gleich viele braucht, um 50 Felder einer Farbe zu überdecken, kann das Schachbrett nicht mit diesen Steinen ausgelegt werden.

Aufgaben:



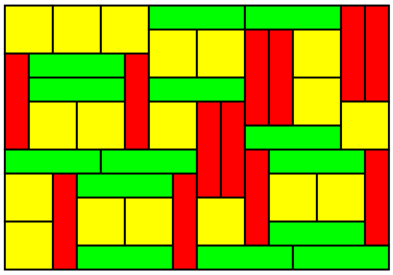
www.MATHE-ZIRKEL.de - Wissenswertes:

Springer-Problem

Auf einem ganz normalen Schachbrett soll der Springer von einer in die gegenüber liegende Ecke gebracht werden, so dass er jedes Feld genau einmal berührt.

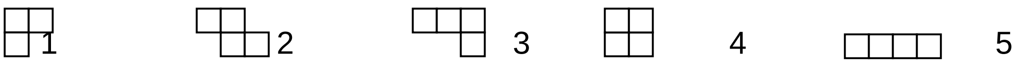
Teppichfliesen

Ein rechteckiges Zimmer ist mit Teppichfliesen der Größe 10×40 cm (rot / grün) und solchen der Größe 20×20 cm (gelb) ausgelegt. Es gibt eine 10×40 Reservefliese. Nun wird aber auf einer 20×20 Fliese Wein verschüttet. Ist es durch geschicktes Umlegen der Fliesen möglich, diese Fliese gegen die Reservefliese auszutauschen? (Sie haben ja die gleiche Fläche.)



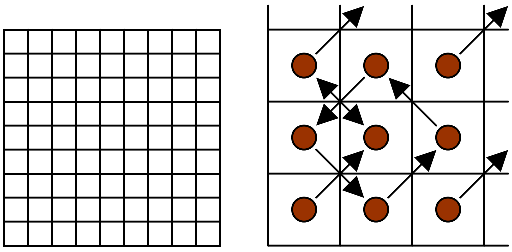
Tetris-Steine

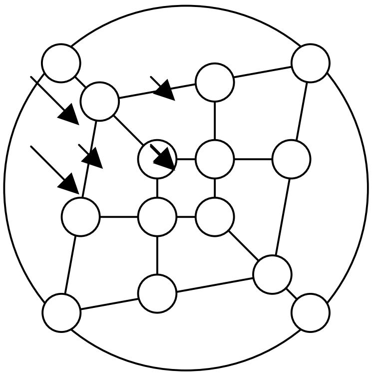
Kann man mit folgenden 5 Tetris-Steinen ein Rechteck legen? (Man darf sie beliebig drehen und spiegeln.)



Das Käfer-Problem

Man stelle sich ein Quadrat mit 9 x 9 Feldern vor. Auf jedem Feld sitzt ein Käfer. Nun krabbelt jeder Käfer auf ein diagonal von ihm liegendes Feld. Die Frage ist, wie viele Felder nach der Neuordnung mindestens frei sind. (Hinweis: Ein Feld darf von mehr als einem Käfer besetzt werden).



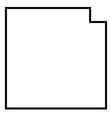


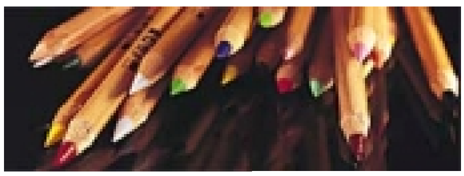
Das Städte-Problem

In abgebildeter Weise sind 14 Städte durch Straßen verbunden. Man beginne in einer beliebigen Stadt.
Frage: Ist es möglich, jede Stadt genau einmal zu besuchen?

Domino-Problem

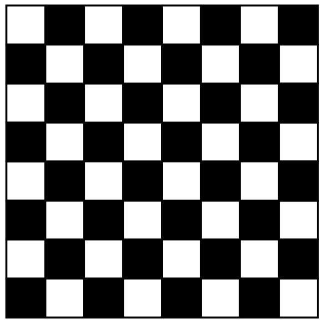
Kann mit Domino-Steinen (2 x 1 Feld groß) ein quadratisches Schachbrett ausgelegt werden, von dem eine Ecke ausgeschnitten ist, so dass die Hälfte der Steine horizontal und die andere Hälfte vertikal liegt?





Lösungen:

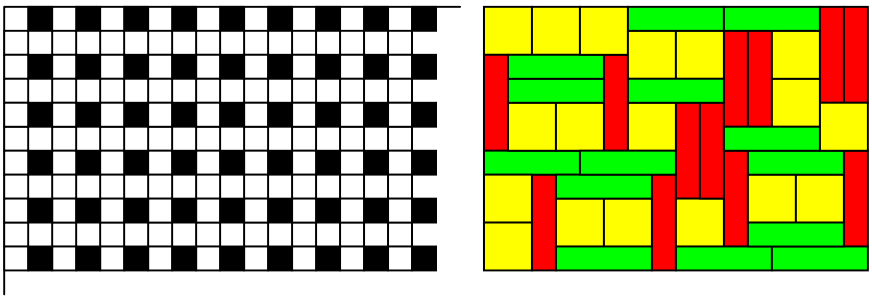
Springer-Problem



Da der Springer bei jedem Zug „die Farbe wechselt" – d.h. immer von einem weißen auf ein schwarzes Feld geht und umgekehrt – wird er, wenn er auf einer schwarzen Ecke beginnt, nach Berühren aller 64 Felder auf einem schwarzem Feld stehen.
Es ist also nicht möglich, dass der Springer nach 63 Zügen (wenn er alle Felder berührt hat) auf der gegenüber liegenden – und damit gleichfarbigen Ecke – steht.

Teppichfliesen

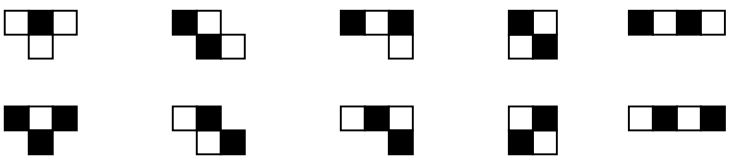
Man stelle sich das Zimmer (unter den Fliesen) wie folgt gefärbt vor:

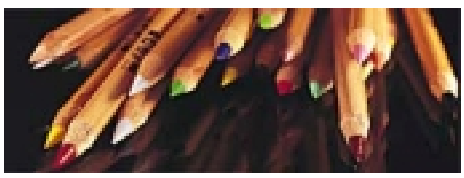


Eine rote / grüne Fliese verdeckt nun immer 2 oder keine schwarzen Felder. Eine gelbe hingegen immer ein schwarzes Feld. Somit kann man keine 20×20 Fliese durch eine 10×40 Fliese ersetzen, weil dann immer ein schwarzes Feld mehr oder weniger verdeckt wird als zuvor, aber es bleiben ja gleich viele schwarze Felder.

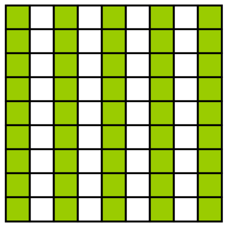
Tetris-Steine

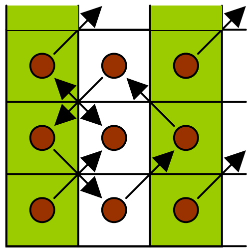
Nein. Man färbe das Rechteck wie ein Schachbrett. Nun sind also von den 20 Feldern 10 schwarz. Bei den Steinen 2 bis 5 sind je 2 Felder schwarz und 2 weiß. Nur Stein 1 hat entweder 3 schwarze und ein weißes oder 3 weiße und ein schwarzes Feld.





Das Käfer-Problem

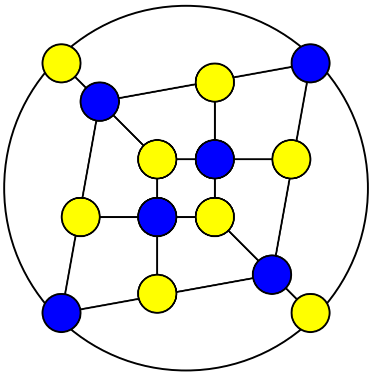




Man färbe das Brett spaltenweise! Nun sieht man, dass jeder Käfer auf ein Feld mit einer anderen Farbe krabbeln muss. Von einer Farbe gibt es 9 Felder mehr, somit ist nun klar, dass mindestens 9 Felder leer bleiben.

Hinweis: Das Beispiel lässt sich auf alle Quadrate mit ungerader Anzahl an Kästchen pro Seite verallgemeinern.

Das Städte-Problem

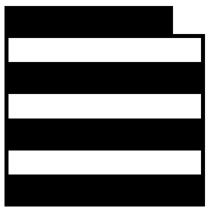


Nein, es ist nicht möglich. Es gibt nur solche Städte, die drei und solche, die vier Verbindungen zu anderen Städten aufweisen. Färbt man nun diese beiden unterschiedlichen Stadtarten, wird man feststellen, dass man von einer 3er-Stadt nur in eine 4er-Stadt kommen kann und umgekehrt.
Es gibt 8 Städte mit 3, aber nur 6 Städte mit 4 Verbindungen. Auch wenn die erste und die letzte Stadt eine 3er-Stadt wäre, dürfte es höchstens eine 4er-Stadt weniger geben (als 3er-Städte).

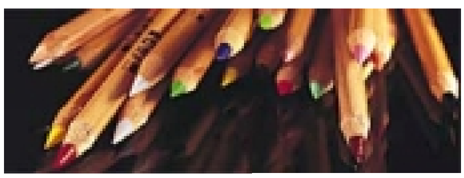
Domino-Problem

Zuerst einmal muss man feststellen, dass die Anzahl der Felder in einer Zeile bzw. Spalte des Schachbretts nicht gerade sein kann. Denn dann wäre die Anzahl der Felder ungerade, da eines herausgeschnitten ist. Mit den Domino-Steinen kann jedoch nur eine gerade Anzahl von Felder abgedeckt werden.

Die Kantenlänge muss also ungerade sein.
Angenommen die Kantenlänge betrage $2n+1$. Kann das Brett dann mit Domino-Steinen ausgelegt werden?
Um das zu überprüfen, färbe man das Brett zeilenweise abwechselnd schwarz und weiß ein.

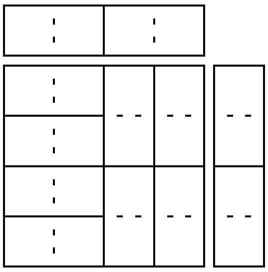


Jetzt hat man $2n^2+3n$ schwarze und $2n^2+n$ weiße Felder, zusammen also $4n^2+4n$ Felder, die mit $2n^2+2n$ Domino-Steinen überdeckt werden können. Somit braucht man n^2+n horizontale bzw. vertikale Steine.



Die vertikalen Steine überdecken jeweils ein schwarzes und ein weißes Feld. Nach dem Verteilen dieser Steine bleiben n^2 weiße und n^2+2n schwarze Felder übrig.
Die horizontalen Steine decken immer zwei Steine der gleichen Farbe ab. D.h. n muss gerade sein um n^2 weiße Felder mit Domino-Steinen zu überdecken.
Die Kantenlänge muss also $4n+1$ betragen. Dass diese Bedingung auch hinreichend ist, sieht man durch Ausprobieren:

4 +1



Nach diesem Muster kann man die Kantenlänge einfach um 4n verlängern, indem man die einzelnen Teile aneinander hängt.