24.05.2004

Erforderliche Kenntnisse: Grundkenntnisse

Annelie Heuser,
Jean-Luc Landvogt
und Ditlef Meins
im 1. Semester

Komplexe Zahlen

Will man nur addieren und subtrahieren, multiplizieren und dividieren, kommt man uneingeschränkt mit reellen Zahlen aus. Schwierigkeiten treten dagegen auf, wenn man aus Zahlen, die kleiner sind als 0, die Wurzel ziehen will. Um diese Schwierigkeiten zu beheben, führt man einen neuen Typ von Zahlen ein: die imaginären Zahlen, die zusammen mit den reellen Zahlen die sogenannten komplexen Zahlen bilden. Was komplexe Zahlen leisten, wie man sie bildet und wie man mit ihnen rechnet, könnt ihr im folgenden erfahren.

1) Motivierende Aufgabe

Versuche, folgende Aufgabe zu lösen:

$x + y = 10$
$x \cdot y = 40$

Versucht man die Aufgabe zu lösen, so kommt man auf die Gleichung

$(x–5)2 = –15$

Diese Gleichung hat keine Lösung im Bereich der reellen Zahlen, weil man aus –15 keine
Wurzel ziehen kann.
Aber meint ihr wirklich, die Wurzel aus –15 gibt es nicht? Die komplexen Zahlen schaffen fast alles. Hier mehr dazu!

2) Historisches

„Komplexe Zahlen verdanken ihr Leben einem Manne, den seine Mutter (wie er selbst berichtet) abtreiben wollte; der sich dann zu einem Wüstling, Streithansl, magisch-mystischen Mathematiker und europaweit gefeierten Arzt entwickelte; ein Mann, der als Student Rektor der Universität Padua und als Greis Insasse des Gefängnisses von Bologna war; der sich erdreistete, das Horoskop Jesu zu stellen und in seinem Buch „Über das Würfelspiel" Betrugsanleitungen zu geben, und der nebenbei auch noch die „Cardanische Aufhängung" erfand:

Geronimo Cardano (1501 – 1576), ein vollblütiger Sohn der italienischen Renaissance." (Quelle: Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis I, 15. Auflage 2003, S.41)

Viele Mathematiker waren nicht bereit, diese in ihren Augen widersprüchlichen Zahlen zu akzeptieren und bestritten ihre Existenz.
Jedoch zeigt sich, dass die komplexen Zahlen genauso eine Erweiterung des Zahlenbereiches sind, wie schon vorher die negativen Zahlen, die Brüche und die Wurzeln.

3) Von der natürlichen zur komplexen Zahl

Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...bezeichnet man als natürliche Zahlen.
Wenn man zwei natürliche Zahlen addiert oder multipliziert, erhält man wieder eine natürliche Zahl.
Was passiert aber, wenn man etwa von der Zahl 4 die Zahl 8 subtrahieren will?
Zu dieser Aufgabe gibt es im Bereich der natürlichen Zahlen keine Lösung. Hier führt man die negativen Zahlen ein: 4–8 ist dann –4.
Die negativen Zahlen, die natürlichen Zahlen und die 0 nennt man nun die ganzen Zahlen. Im Bereich der ganzen Zahlen kann man jetzt uneingeschränkt addieren, subtrahieren und multiplizieren.
Will man aber 2 durch 3, 7 durch 5 oder 5 durch 8 teilen, stößt man wieder auf Probleme.

Hier führt man rationale Zahlen ein: $2:3 = \frac{2}{3}$, $7:5 = \frac{7}{5}$, $5:8 = \frac{5}{8}$.
Jede ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl.
Nun kann man (mit Ausnahme der Division durch 0) alle Grundrechenarten uneingeschränkt durchführen.
Aber: Was ist, wenn man aus 2 die Wurzel ziehen will? Es gibt keine rationale Zahl, die die Wurzel aus 2 ist.
Hier führt man die irrationalen Zahlen ein, und schon kann man z.B. aus 2 die Wurzel ziehen.
Auch die Kreiszahl Pi ist eine irrationale Zahl, auf die man stößt, wenn man den Umfang und Inhalt eines Kreises berechnen will.
$\sqrt{2}$ = 1,41.....
π = 3,14159....
Die rationalen und die irrationalen Zahlen zusammen bilden die reellen Zahlen.
Nun kann man aus jeder nichtnegativen Zahl die Wurzel ziehen.

Was ist aber mit den Wurzeln aus negativen Zahlen?
Multipliziert man eine positive Zahl (oder 0) mit sich selbst, erhält man eine positive Zahl (bzw. 0). Multipliziert man eine negative Zahl mit sich selbst,

erhält man ebenfalls eine positive Zahl. Es existiert also keine reelle Zahl, deren Quadrat eine negative reelle Zahl ist. Gleichungen der Form
$x^2 = -a$ (mit $a > 0$)
haben keine reelle Lösung.

Um solche Gleichungen lösen zu können, führt man daher eine neue Klasse von Zahlen ein: die Wurzeln aus negativen reellen Zahlen. Sie haben die Form $\sqrt{-a}$ (mit $a > 0$) und werden als imaginäre Zahlen bezeichnet. So ist beispielsweise $\sqrt{-5}$ diejenige imaginäre Zahl, die die Gleichung $x^2 = -5$ löst.

Aus dieser Eigenschaft folgt bereits eine erste Rechenregel für imaginäre Zahlen. Multipliziert man sie mit sich selbst, erhält man als Produkt genau die negative reelle Zahl, die unter dem Wurzelzeichen steht:
$\sqrt{-a}\,\sqrt{-a} = -a$.

Zwei kleine Aufgaben:
Welche der beiden folgenden Zahlen ist größer: $\sqrt{-4}$ oder $2\cdot\sqrt{-1}$?
Es gilt:
$\sqrt{-4} = \sqrt{-1\cdot 4} = \sqrt{4}\,\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$.
Beide Zahlen sind also identisch.

Welche der beiden folgenden Zahlen ist größer: $\sqrt{-5}$ oder $\cdot\sqrt{5}\,\sqrt{-1}$?
Es gilt:
$\sqrt{-5} = \sqrt{-1\cdot 5} = \sqrt{5}\,\sqrt{-1}$.
Auch diese Zahlen sind also identisch.

Ganz allgemein gilt für jede reelle Zahl $a > 0$:
$\sqrt{-a} = \sqrt{-1\cdot a} = \sqrt{a}\,\sqrt{-1}$.
Man kann also alle imaginären Zahlen als ein reelles Vielfaches von $\sqrt{-1}$ darstellen .
Für $\sqrt{-1}$ führt man das Symbol i („imaginär", „imaginäre Einheit") ein. Damit können wir z.B. schreiben:
$\sqrt{-1} = 2i$, $\sqrt{-5} = \sqrt{5}\,i$.
Oder allgemein ausgedrückt: Jede imaginäre Zahl lässt sich in der Form bi darstellen, wobei b eine reelle Zahl ist.

Was ist $4 + \sqrt{-6}$?
Lösung: $4 + \sqrt{6}\,i$.

Addiert man eine reelle Zahl und eine imaginäre Zahl, erhält man ein solches Gebilde.
Alle Zahlen, die sich in dieser Weise als Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl darstellen lassen, bezeichnet man als komplexe Zahlen.
Imaginäre Zahlen sind dann komplexe Zahlen, bei denen der reelle Anteil 0 ist, reelle Zahlen sind komplexe Zahlen, bei denen der imaginäre Anteil 0 ist. Die Menge der komplexen Zahlen umfaßt also auch die reellen und die imaginären Zahlen.

Allgemein kann man komplexe Zahlen in der Form a + bi schreiben, wobei a und b reelle Zahlen sind und i für die imaginäre Einheit steht. Man kann komplexe Zahlen aber auch als Zahlenpaar (a, b) darstellen, wenn man sich darauf einigt, dass a den reellen und b den imaginären Anteil der komplexen Zahl bezeichnet.
Also: $(5,6) = 5 + 6i = 5 + 6\sqrt{-1}$.

4) Rechenregeln

Man kann mit komplexen Zahlen rechnen wie mit reellen Zahlen auch. Man muss dabei nur berücksichtigen, dass definitionsgemäß $i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ ist.

- Addition: $(a+bi)+(c+di) = (a+b)+(c+d)i$
- Subtraktion: $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$
- Multiplikation: $(a+bi)\cdot(c+di) = ac+bic+adi+bidi = ac+bdii+bci+adi = (ac-bd)+(bc+ad)i$
- Division: $(a+bi)/(c+di) = ((a+bi)(c-di))/((c+di)(c-di)) = ((ac+bd)+(bc-ad)i)/(cc+dd) = (ac+bd)/(cc+dd)+i(bc-ad)/(cc+dd)$, falls $c+di \neq 0$.

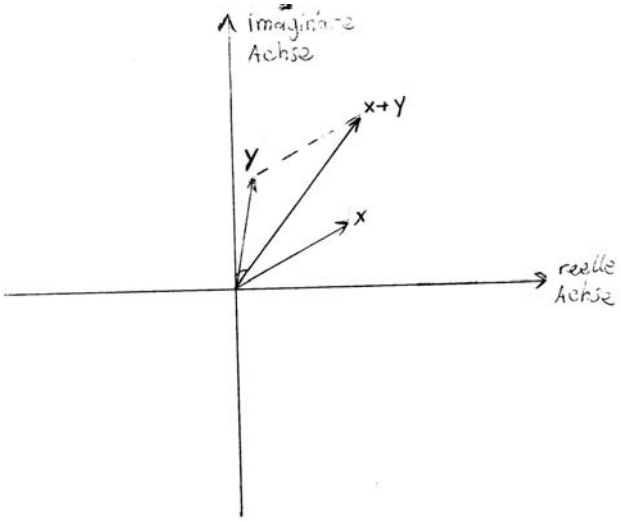
5) Problem: Keine Anordnung nach Größe möglich

Aufgabe: Überlege dir, ob die imaginäre Zahl i größer ist als 0 oder kleiner.
Angenommen: $i > 0$.
Dann wäre $i \cdot i > 0$, denn das Produkt zweier positiver Zahlen ist eine positive Zahl.
Andererseits gilt: $i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1 < 0$.
Die Annahme führt zu einem Widerspruch.
Angenommen $i < 0$. Dann wäre $-i > 0$, also auch $(-i)(-i) > 0$, da das Produkt zweier positiver Zahlen positiv ist.

Andererseits gilt: $(-i)(-i) = (-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = -1 < 0$.
Auch diese Annahme führt zu einem Widerspruch.
Wir stellen also fest: i kann weder größer noch kleiner als 0 sein.
i kann aber auch nicht gleich 0 sein, denn $0 \cdot 0 = 0 > -1 = i \cdot i$.
Es gibt also keine Möglichkeit, imaginäre und reelle Zahlen zusammen der Größe nach so zu ordnen, daß die Ordnung mit den üblichen Rechenregeln verträglich ist.
Das bedeutet: Wenn man sich die reellen Zahlen als eine Zahlengerade vorstellt, gibt es keine Möglichkeit, die imaginären Zahlen in die Zahlengerade einzufügen.
Das ist einer der Hauptgründe gewesen, warum Mathematiker früher nicht bereit waren, imaginäre Zahlen zu akzeptieren. Dieses Problem wurde erst 1831 von Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) gelöst.

6) Lösung: Gaußsche Zahlenebene

Zur anschaulichen Darstellung komplexer Zahlen ersetzte Carl Friedrich Gauß die Zahlengerade durch eine Zahlenebene.
Jede komplexe Zahl läßt sich als Punkt in der Gaußschen Zahlenebene darstellen, indem man ihren Realteil als x-Koordinate und ihren Imaginärteil als y-Koordinate auffaßt. Alle reellen Zahlen liegen auf der x-Achse (reelle Achse), alle imaginären Zahlen liegen auf der y-Achse (imaginäre Achse).
Die Addition zweier komplexer Zahlen entspricht anschaulich ihrer Vektoraddition.



Um die Multiplikation anschaulich darzustellen, muß man zunächst zwei neue Begriffe einführen:

Der Betrag einer komplexen Zahl ist die Länge des Ortsvektors, die man nach dem Satz des Pythagoras berechnen kann.

z = a + i b

$|z|2$ = a2+b2

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Das Argument einer komplexen Zahl ist der Winkel zwischen dem Ortsvektor und der reellen Achse.

z = a + i b

arg (z)= α

$\sin\alpha = \frac{b}{|z|}$ $\cos = \frac{a}{|z|}$

Man kann eine Zahl a + bi so schreiben:

z = a+ bi = $|z|\cdot\frac{1}{|z|}\cdot a + |z|\cdot\frac{1}{|z|}\cdot b\cdot i = |z|\left(\frac{a}{|z|}+\frac{b}{|z|}\cdot i\right)$

= $|z|\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$ mit $\alpha := \arg(z)$

Diese Darstellung nennt man auch Darstellung in Polarkoordinaten.

Nun eine kleine Aufgabe:

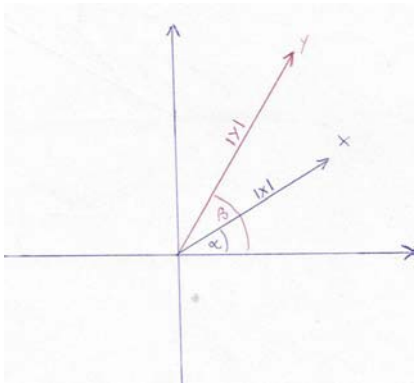
Multipliziere x = 1+i und y = -1+2i miteinander und trage das Ergebnis auf der Zahlenebene ein.
Vergleiche den Winkel der neuen Zahl mit den beiden alten Winkeln und den Betrag der neuen Zahl mit den alten Beträgen. Was fällt dir auf?

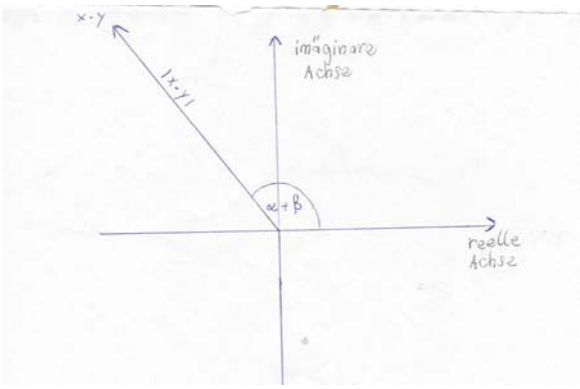
Lösung:

$x\cdot y = (1 + i)\ (-1 + 2i) = -1\ (-i) + 2i + 2i\cdot i = -1 + i + 2\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$

$= -1\ i\ (-2) = -3 + i$

Der Betrag ist das Produkt der alten Beträge, der Winkel die Summe der alten Winkel.
Anschaulich sieht das so aus:





Dass dieser Zusammenhang grundsätzlich gilt kann man auch ganz allgemein beweisen.
Seien zwei komplexe Zahlen x und y gegeben in ihrer Polardarstellung mit $\alpha :=$ arg(x) und $\beta :=$ arg(y).

$$x = |x| \cdot \cos\alpha + \sin\alpha$$
$$y = |y| \cdot \cos\beta + \sin\beta$$

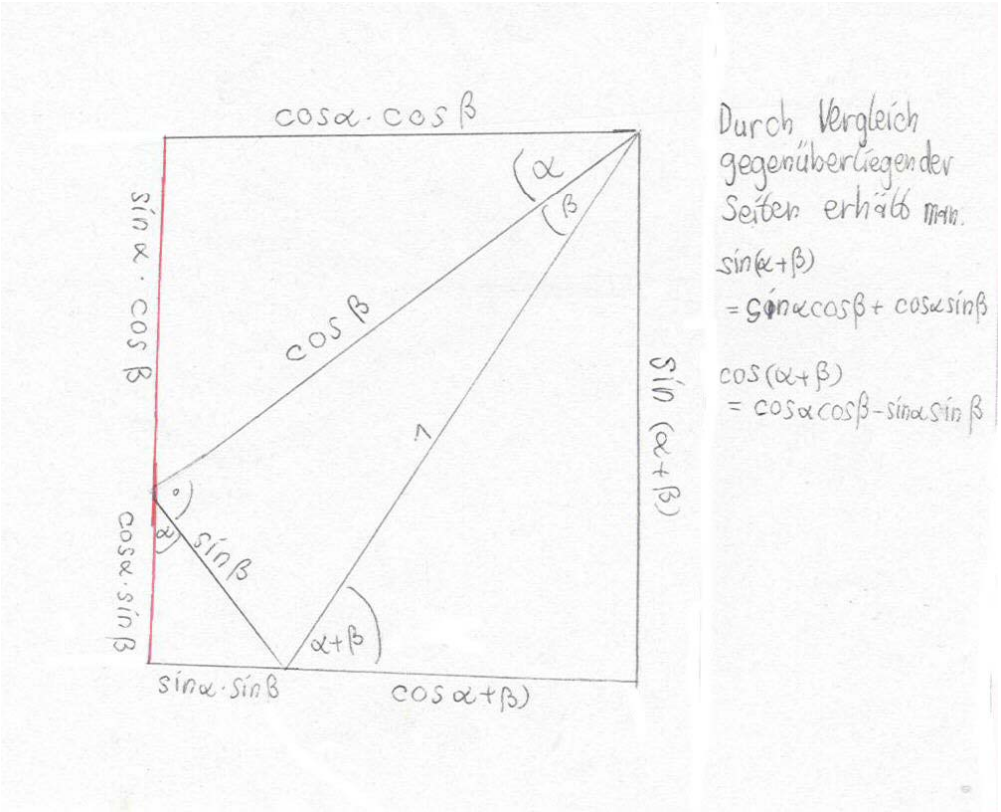
Durch formales ausmultiplizieren erhält man:

$$\begin{aligned}
x \cdot y &= |x| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha) \cdot |y| \cdot \cos\beta + i \sin\beta \\
&= |x| \cdot |y| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha) \cdot \cos\beta + i \sin\beta \\
&= |x \cdot y| \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot i \sin\beta + i \sin\alpha \cdot \cos\beta + i \sin\alpha\, i \cdot \sin\beta) \\
&= |x \cdot y| \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta + i \cdot i \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta + i \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta + i \sin\alpha \cdot \cos\beta) \\
&= |x \cdot y| \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sqrt{-1}\sqrt{-1} \sin\alpha \cdot \sin\beta + i \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta + i \sin\alpha \cdot \cos\beta) \\
&= |x \cdot y| \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta + i \cdot (\cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta)
\end{aligned}$$

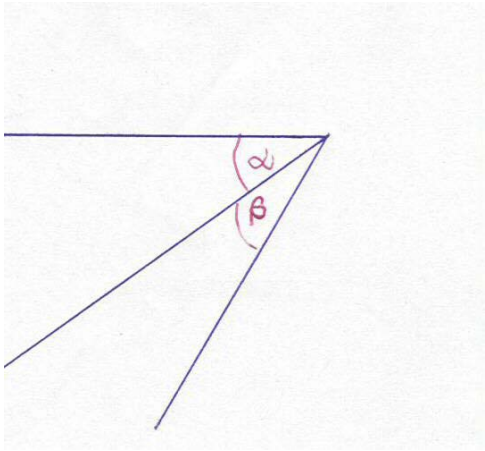
Um diese Gleichung weiter umformen zu können müssen wir zuerst die Additions-
theoreme einfügen.

Die Additionstheoreme für Winkelfunktionen lauten:

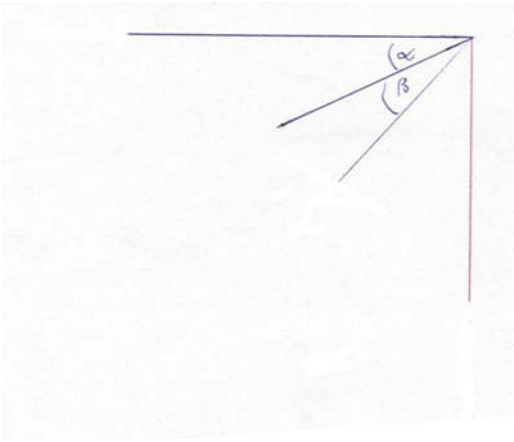
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta$$

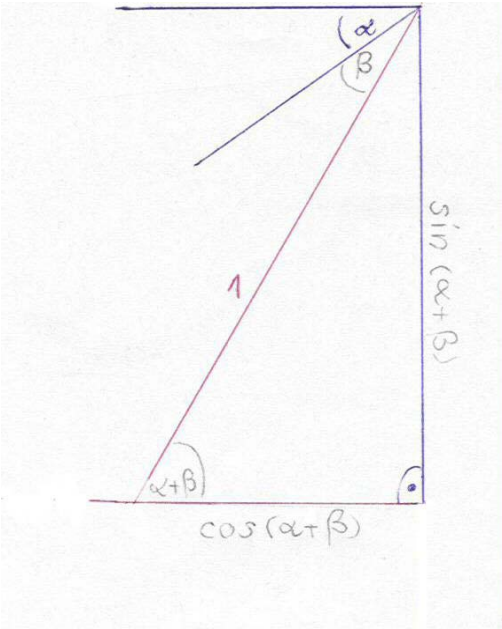


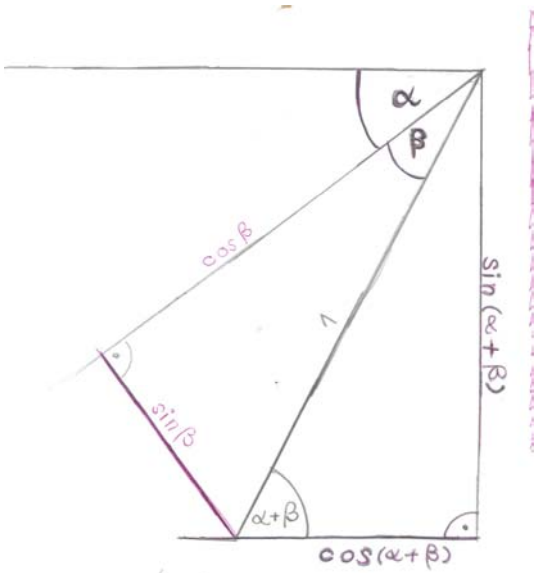
Dieser Beweis kommt durch folgende Schritte zustande:



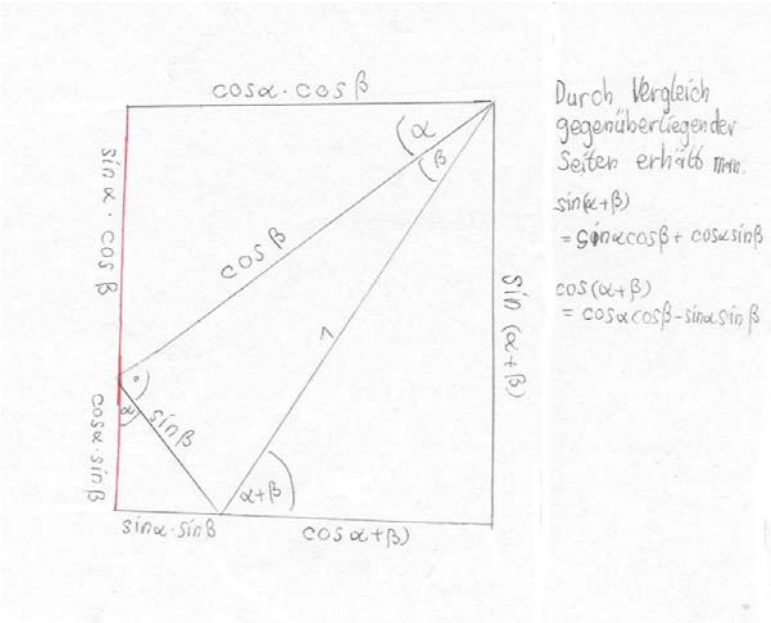
2.







4.



betrachten wir nun wieder die Gleichung:

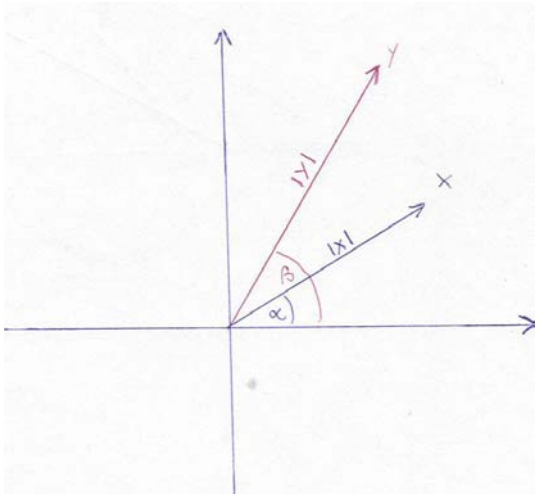
$$x \cdot y = |x \cdot y| \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta + i \cdot (\cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta)$$

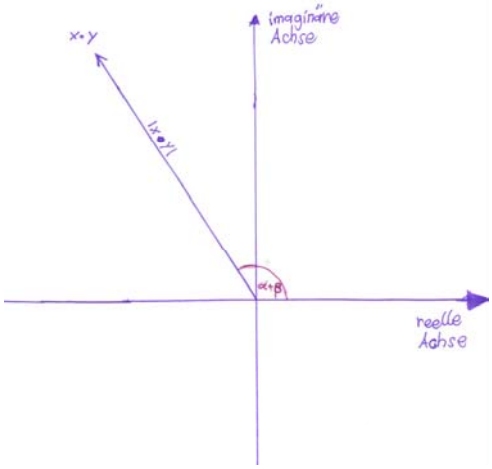
es folgt weiter:

$$= |x \cdot y| \cdot (\cos(\alpha+\beta) + i \cdot \sin(\alpha+\beta))$$

Anschaulich bedeutet das:

Man erhält das Produkt zweier komplexer Zahlen, indem man die Streckenlänge miteinander multipliziert und die beiden Winkel addiert.





Noch eine kleine Aufgabe für Freaks:

Überlege dir wie viel komplexe Zahlen es gibt, die die vierte Wurzel aus 1 sind. Wie viele Lösungen hat die Gleichung x4 = 1??

Tipp: Versuche die Wurzeln zu finden, indem du sie in der Gaußschen Zahlenebene darstellst. Überlege dir, wie groß die Streckenlänge der Wurzel sein muss (1 Lösung) und überlege dir, wie groß der Winkel sein muss (4 Lösungen)!